

Mutación de complejos cosilting
de dos términos

usando categorías extrianguladas

Diego Alberto Barceló Nieves

Categorías, Álgebras y Temas Afines (CATA 2025-0)

IMATE-CU, UNAM, 13/11/25

§1. Motivación

§2. Mutación silting

§3. Complejos cosilting

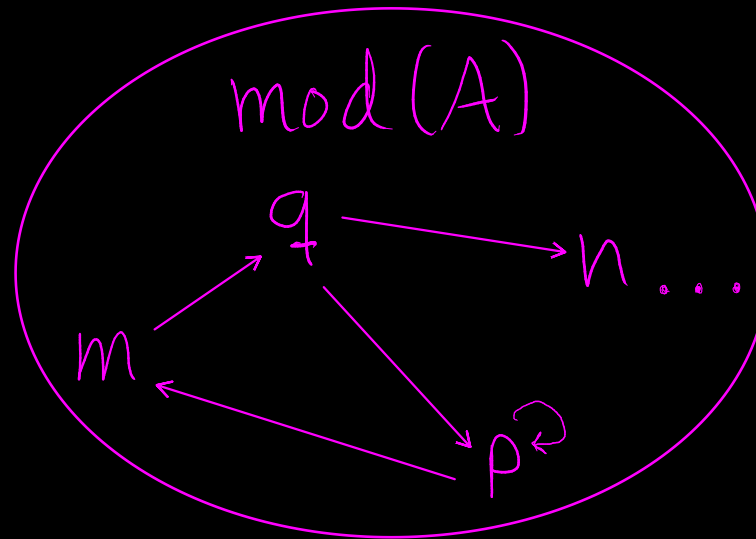
§4. Resultados

- La teoría de representaciones de álgebras busca entender un álgebra A a través de sus representaciones (o A -módulos).

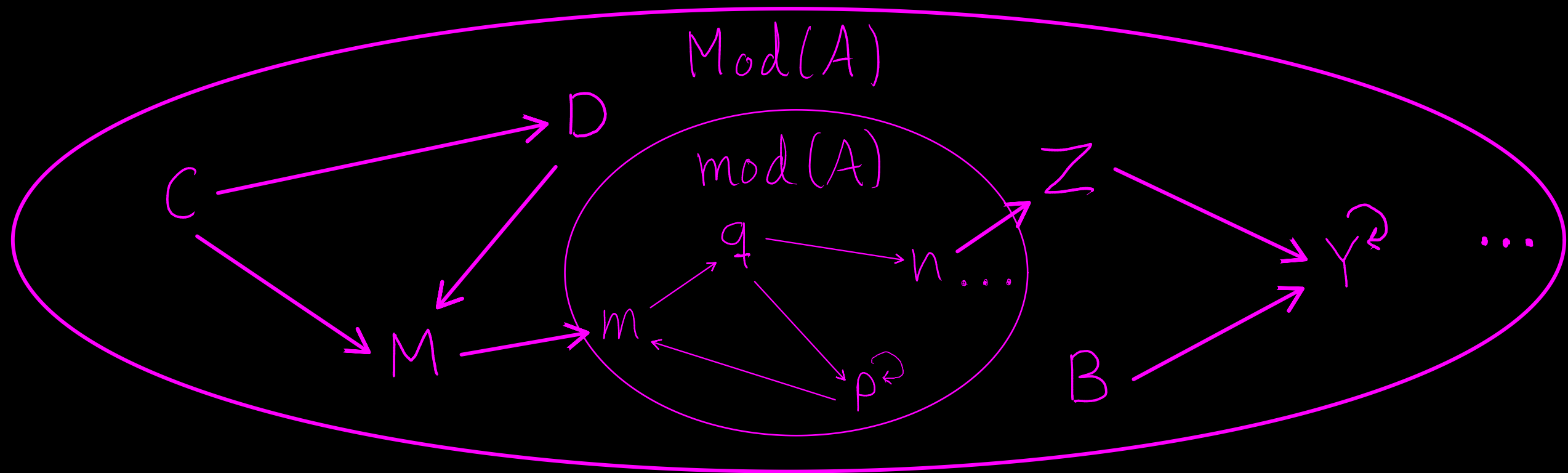
- La teoría de representaciones de álgebras busca entender un álgebra A a través de sus representaciones (o A -módulos).
- Cada A -módulo nos da un "modelo" parcial de la estructura algebraica de A .

- La teoría de representaciones de álgebras busca entender un álgebra A a través de sus representaciones (o A -módulos).
- Cada A -módulo nos da un "modelo" parcial de la estructura algebraica de A .
- Podemos estudiar todos estos "modelos" estudiando las categorías de A -módulos.

- La teoría de representaciones de álgebras busca entender un álgebra A a través de sus representaciones (o A -módulos).
- Cada A -módulo nos da un "modelo" parcial de la estructura algebraica de A .
- Podemos estudiar todos estos "modelos" estudiando las categorías de A -módulos.

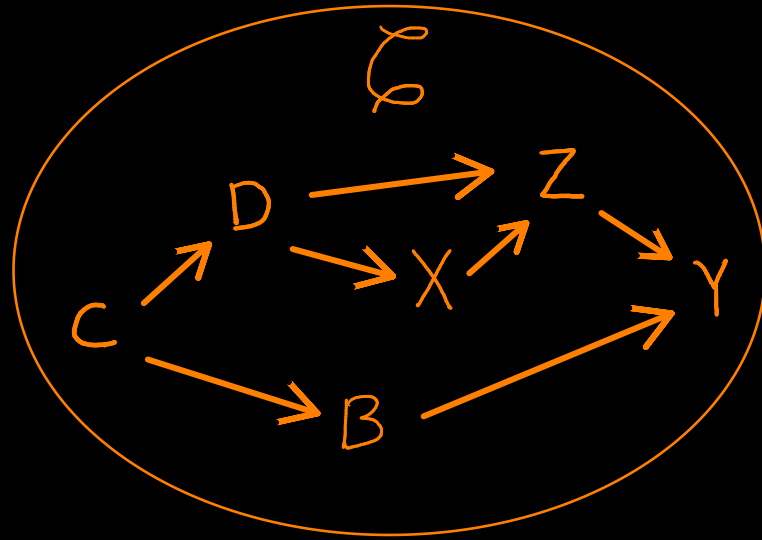


- La teoría de representaciones de álgebras busca entender un álgebra A a través de sus representaciones (o A -módulos).
- Cada A -módulo nos da un "modelo" parcial de la estructura algebraica de A .
- Podemos estudiar todos estos "modelos" estudiando las categorías de A -módulos.

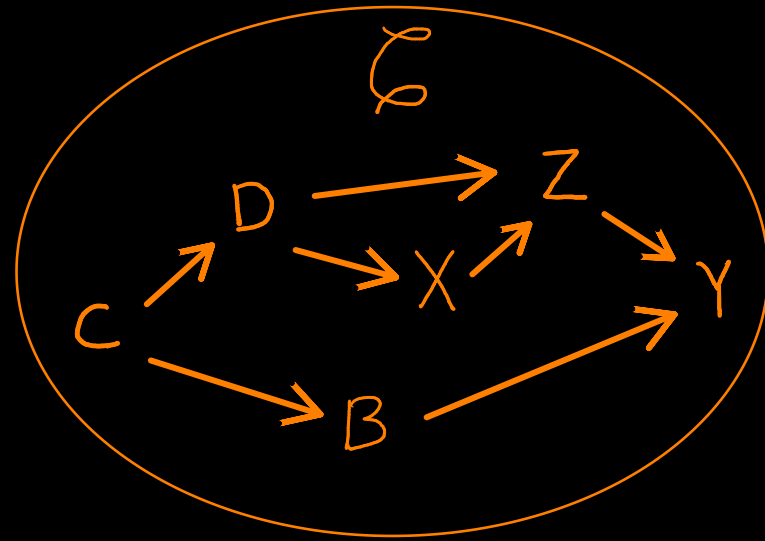


- Un par de torsión (T, F) en $\mathcal{C}$ es una descomposición de esta categoría en dos subcategorías ortogonales con objeto cero a partir de las cuales puede ser reconstruida.

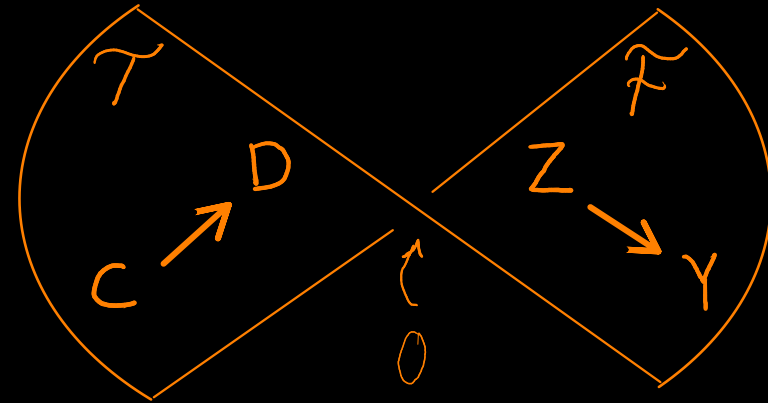
- Un par de torsión (T, F) en $\mathcal{C}$ es una descomposición de esta categoría en dos subcategorías ortogonales con objeto cero a partir de las cuales puede ser reconstruida.



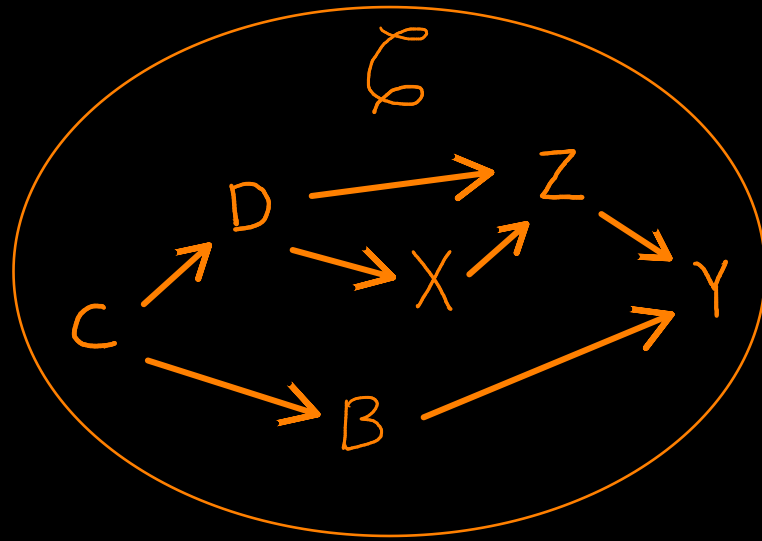
- Un *par de torsión* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ en $\mathcal{C}$ es una descomposición de esta categoría en dos subcategorías ortogonales con objeto cero a partir de las cuales puede ser reconstruida.



"torcer"

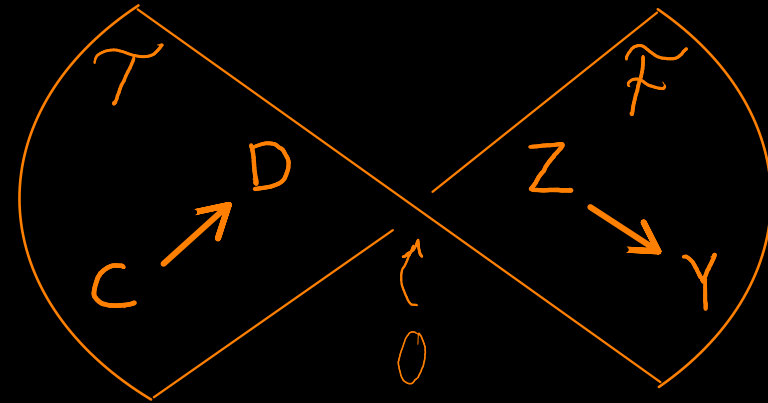


- Un *par de torsión* $(T, \tilde{F})$ en $\mathcal{C}$ es una descomposición de esta categoría en dos subcategorías ortogonales con objeto cero a partir de las cuales puede ser reconstruida.

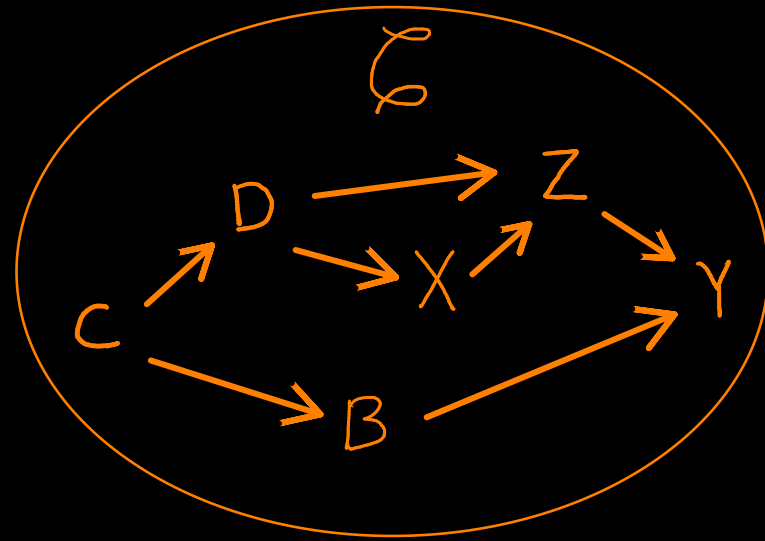


"torcer"
 $\rightsquigarrow$

$\leftarrow \rightsquigarrow$
 "destorcer"

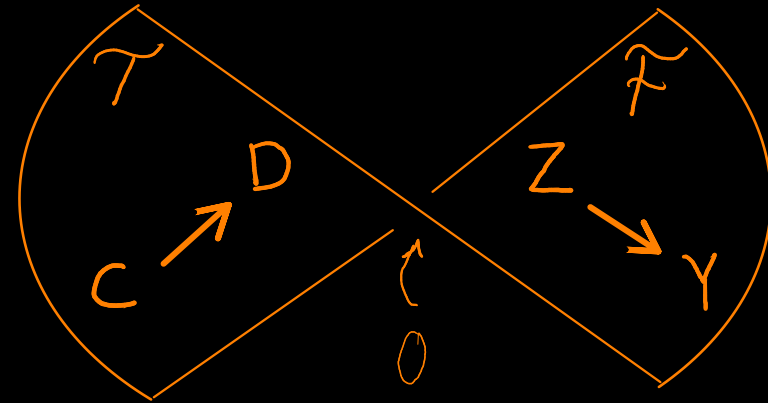


- Un *par de torsión* $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ en $\mathcal{C}$ es una descomposición de esta categoría en dos subcategorías ortogonales con objeto cero a partir de las cuales puede ser reconstruida.



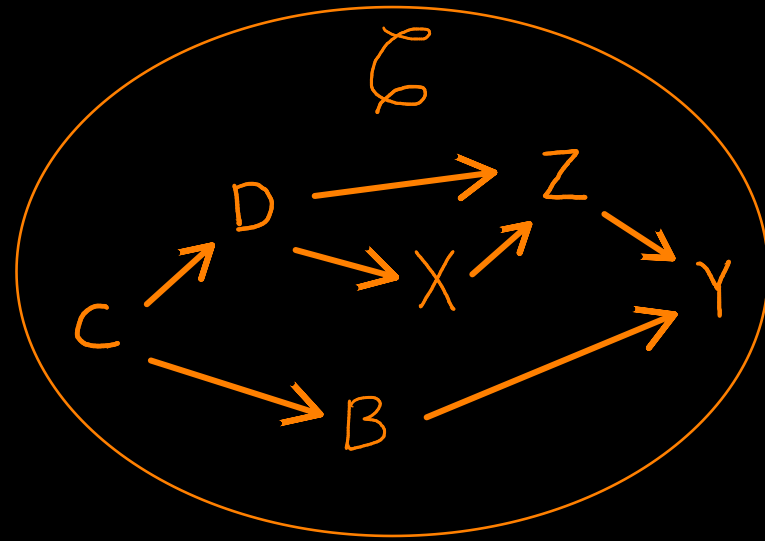
"torcer"
 $\rightsquigarrow$

$\leftarrow\!\!\!\sim$
 "destorcer"

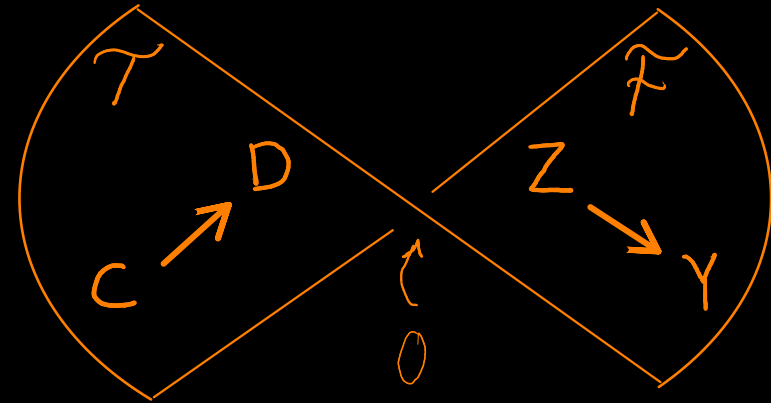


- Cada par de torsión en $\mathcal{C}$ ofrece una *descomposición única* de $\mathcal{C}$, por lo cual tener control de ellos se vuelve una herramienta poderosa.

- Un par de torsión $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ en $\mathcal{C}$ es una descomposición de esta categoría en dos subcategorías ortogonales con objeto cero a partir de las cuales puede ser reconstruida.



"torcer"
 $\rightsquigarrow$
 $\leftarrow$
 "destorcer"



- Cada par de torsión en $\mathcal{C}$ ofrece una descomposición única de $\mathcal{C}$, por lo cual tener control de ellos se vuelve una herramienta poderosa.
- Adachi, Iyama y Reiten demostraron en 2014 que, si A es de dimensión finita, podemos mutar algunos pares de torsión de $\text{mod}(A)$ a través de complejos silting de dos términos*.

- Por resultados de Breen y Pop en 2017 y Angeleri Hügel en 2018, los pares de torsión en $\text{mod}(A)$ están en biyección con complejos cosilting de dos términos (módulo equivalencia).

- Por resultados de Breen y Pop en 2017 y Angeleri Hügel en 2018, los pares de torsión en $\text{mod}(A)$ están en biyección con complejos cosilting de dos términos (módulo equivalencia).
- En 2025, Angeleri Hügel, Laking, Šťovíček y Vitória introdujeron una teoría de mutación para objetos cosilting, que incluye a los complejos cosilting de dos términos, usando t-estructuras.

- Por resultados de Breen y Pop en 2017 y Angeleri Hügel en 2018, los pares de torsión en $\text{mod}(A)$ están en biyección con complejos cosilting de dos términos (módulo equivalencia).
- En 2025, Angeleri Hügel, Laking, Šťovíček y Vitória introdujeron una teoría de mutación para objetos cosilting, que incluye a los complejos cosilting de dos términos, usando t-estructuras.
- Aún cuando un complejo cosilting de dos términos es mutable bajo esta teoría, el resultado de la mutación no necesariamente es un complejo cosilting del mismo tipo.

- Por resultados de Breen y Pop en 2017 y Angeleri Hügel en 2018, los pares de torsión en $\text{mod}(A)$ están en biyección con complejos cosilting de dos términos (módulo equivalencia).
- En 2025, Angeleri Hügel, Laking, Šťovíček y Vitória introdujeron una teoría de mutación para objetos cosilting, que incluye a los complejos cosilting de dos términos, usando t-estructuras.
- Aún cuando un complejo cosilting de dos términos es mutable bajo esta teoría, el resultado de la mutación no necesariamente es un complejo cosilting del mismo tipo.

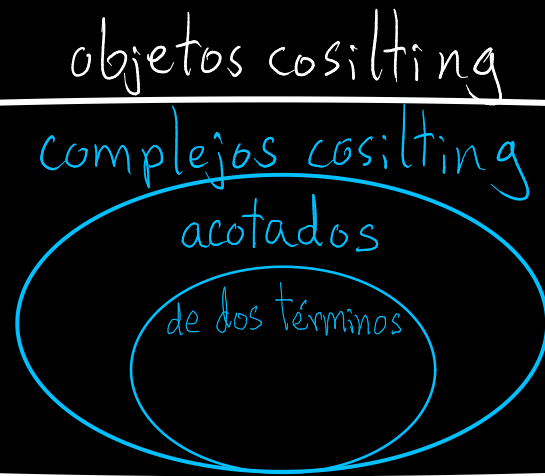
objetos cosilting



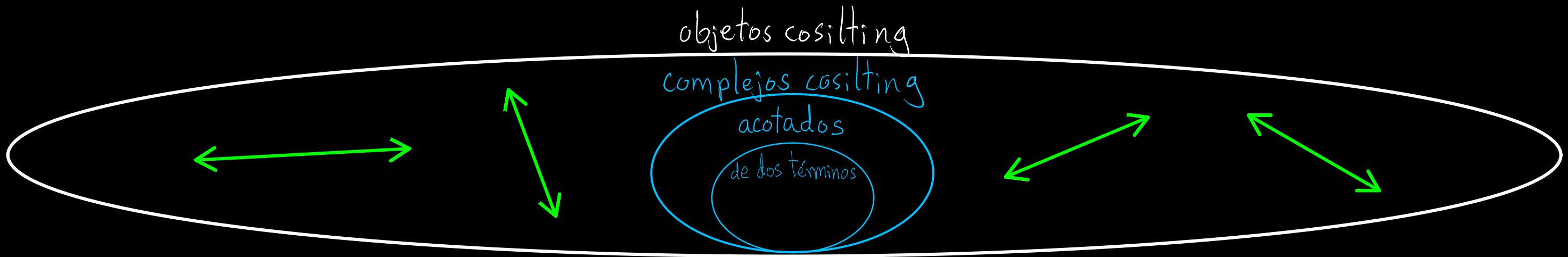
- Por resultados de Breen y Pop en 2017 y Angeleri Hügel en 2018, los pares de torsión en $\text{mod}(A)$ están en biyección con complejos cosilting de dos términos (módulo equivalencia).
- En 2025, Angeleri Hügel, Laking, Šťovíček y Vitória introdujeron una teoría de mutación para objetos cosilting, que incluye a los complejos cosilting de dos términos, usando t-estructuras.
- Aún cuando un complejo cosilting de dos términos es mutable bajo esta teoría, el resultado de la mutación no necesariamente es un complejo cosilting del mismo tipo.

objetos cosilting
complejos cosilting
acotados

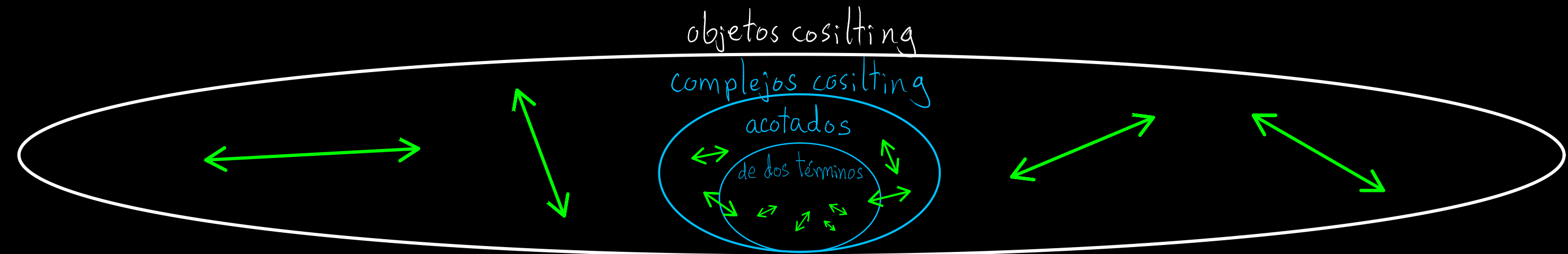
- Por resultados de Breen y Pop en 2017 y Angeleri Hügel en 2018, los pares de torsión en $\text{mod}(A)$ están en biyección con complejos cosilting de dos términos (módulo equivalencia).
- En 2025, Angeleri Hügel, Laking, Šťovíček y Vitória introdujeron una teoría de mutación para objetos cosilting, que incluye a los complejos cosilting de dos términos, usando t-estructuras.
- Aún cuando un complejo cosilting de dos términos es mutable bajo esta teoría, el resultado de la mutación no necesariamente es un complejo cosilting del mismo tipo.



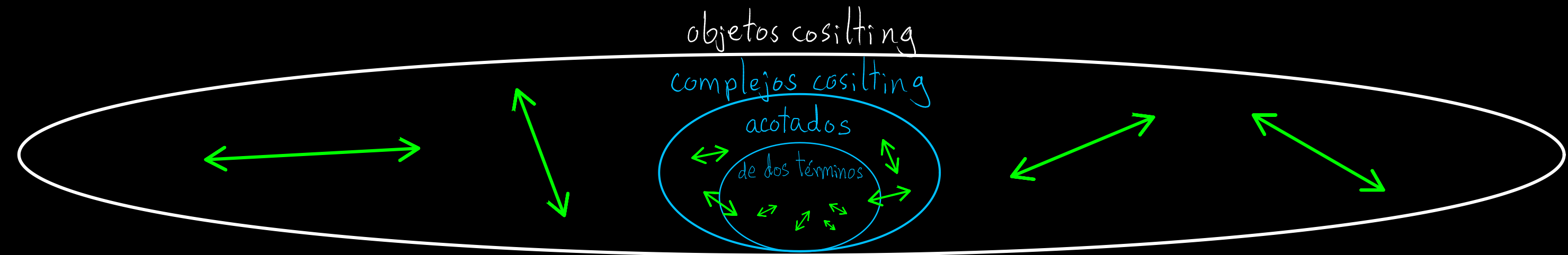
- Por resultados de Breen y Pop en 2017 y Angeleri Hügel en 2018, los **pares de torsión** en **$\text{mod}(A)$** están en biyección con **complejos cosilting de dos términos** (módulo equivalencia).
- En 2025, Angeleri Hügel, Laking, Šťovíček y Vitória introdujeron una teoría de **mutación** para objetos cosilting, que incluye a los **complejos cosilting de dos términos**, usando t -estructuras.
- Aún cuando un **complejo cosilting de dos términos** es **mutable** bajo esta teoría, el resultado de la **mutación** no necesariamente es un **complejo cosilting** del mismo tipo.



- Por resultados de Breen y Pop en 2017 y Angeleri Hügel en 2018, los pares de torsión en $\text{mod}(A)$ están en biyección con complejos cosilting de dos términos (módulo equivalencia).
- En 2025, Angeleri Hügel, Laking, Šťovíček y Vitória introdujeron una teoría de mutación para objetos cosilting, que incluye a los complejos cosilting de dos términos, usando t-estructuras.
- Aún cuando un complejo cosilting de dos términos es mutable bajo esta teoría, el resultado de la mutación no necesariamente es un complejo cosilting del mismo tipo.



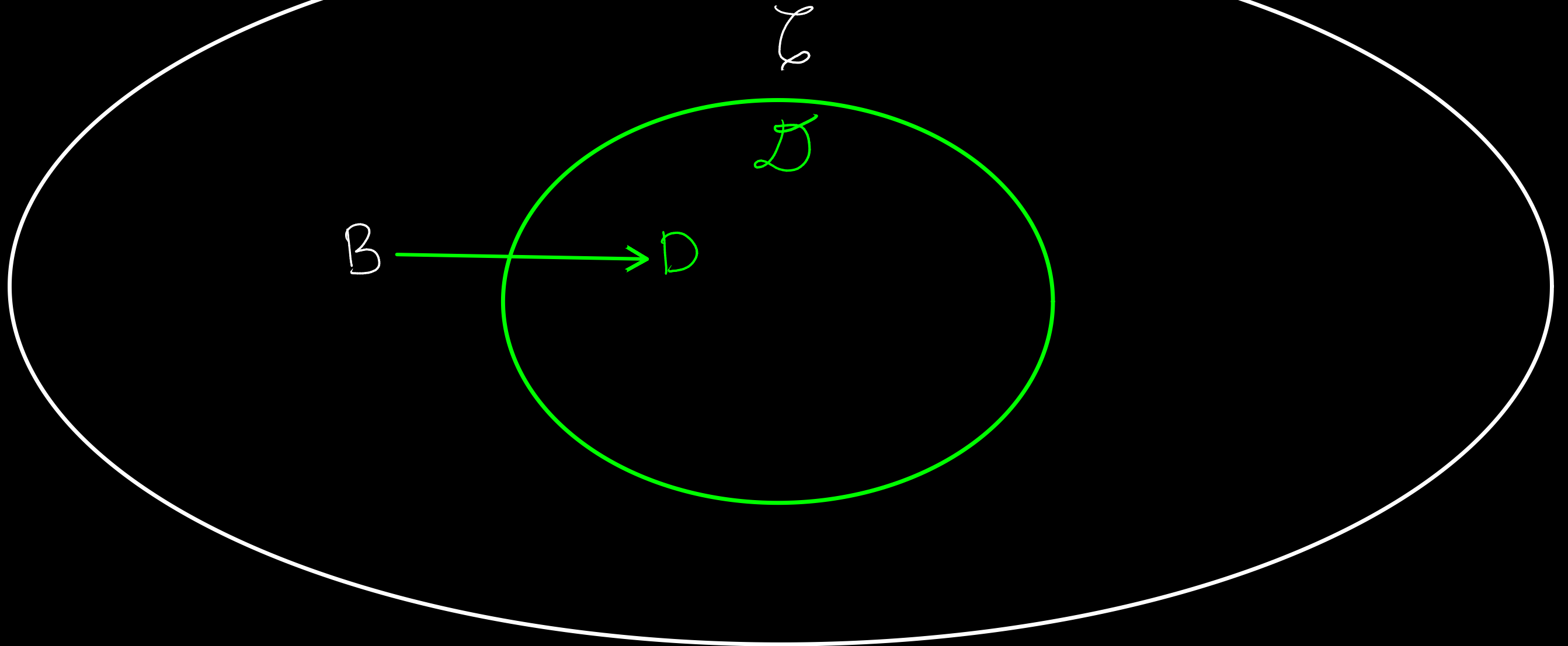
- Por resultados de Breen y Pop en 2017 y Angeleri Hügel en 2018, los pares de torsión en $\text{mod}(A)$ están en biyección con complejos cosilting de dos términos (módulo equivalencia).
- En 2025, Angeleri Hügel, Laking, Šťovíček y Vitória introdujeron una teoría de mutación para objetos cosilting, que incluye a los complejos cosilting de dos términos, usando t-estructuras.
- Aún cuando un complejo cosilting de dos términos es mutable bajo esta teoría, el resultado de la mutación no necesariamente es un complejo cosilting del mismo tipo.



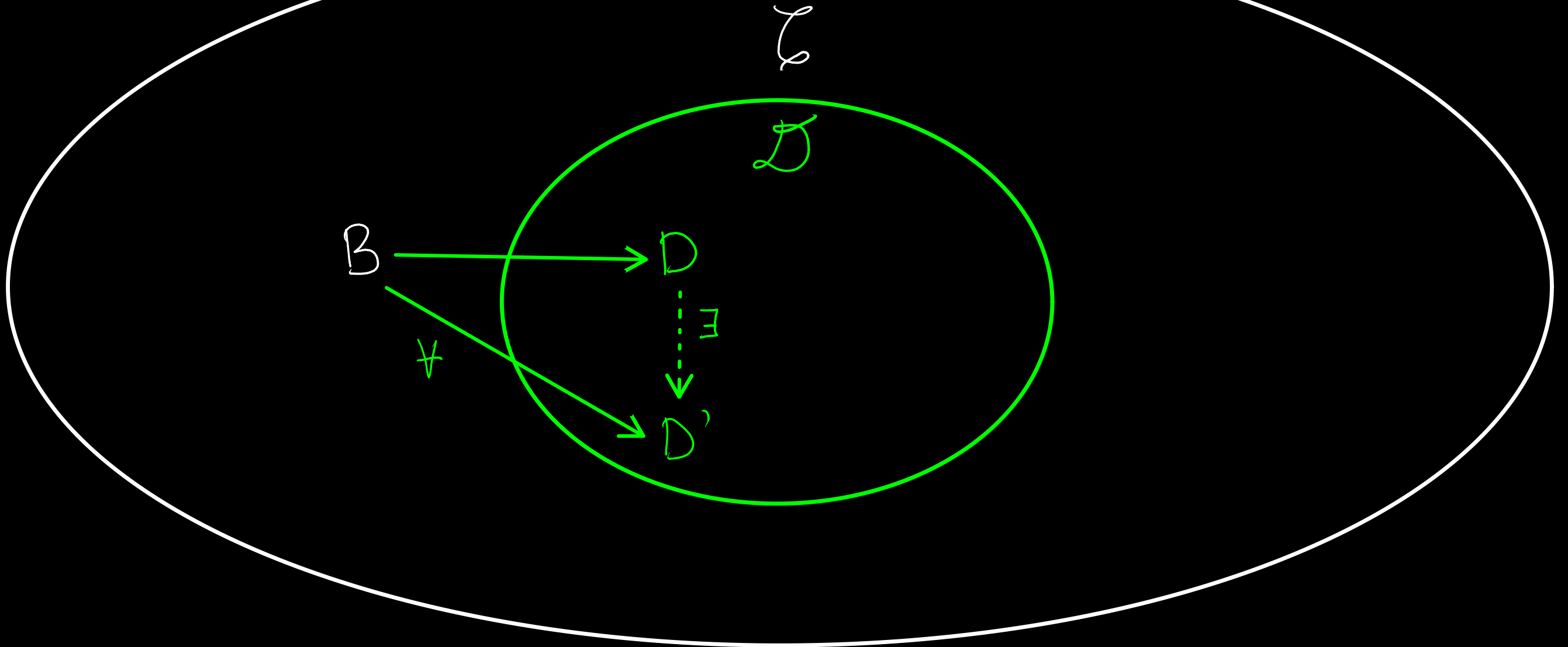
- **Objetivo:** desarrollar una teoría de mutación para complejos cosilting de dos términos.

- Las nociones fundamentales para la *mutación silting* son las *aproximaciones*.

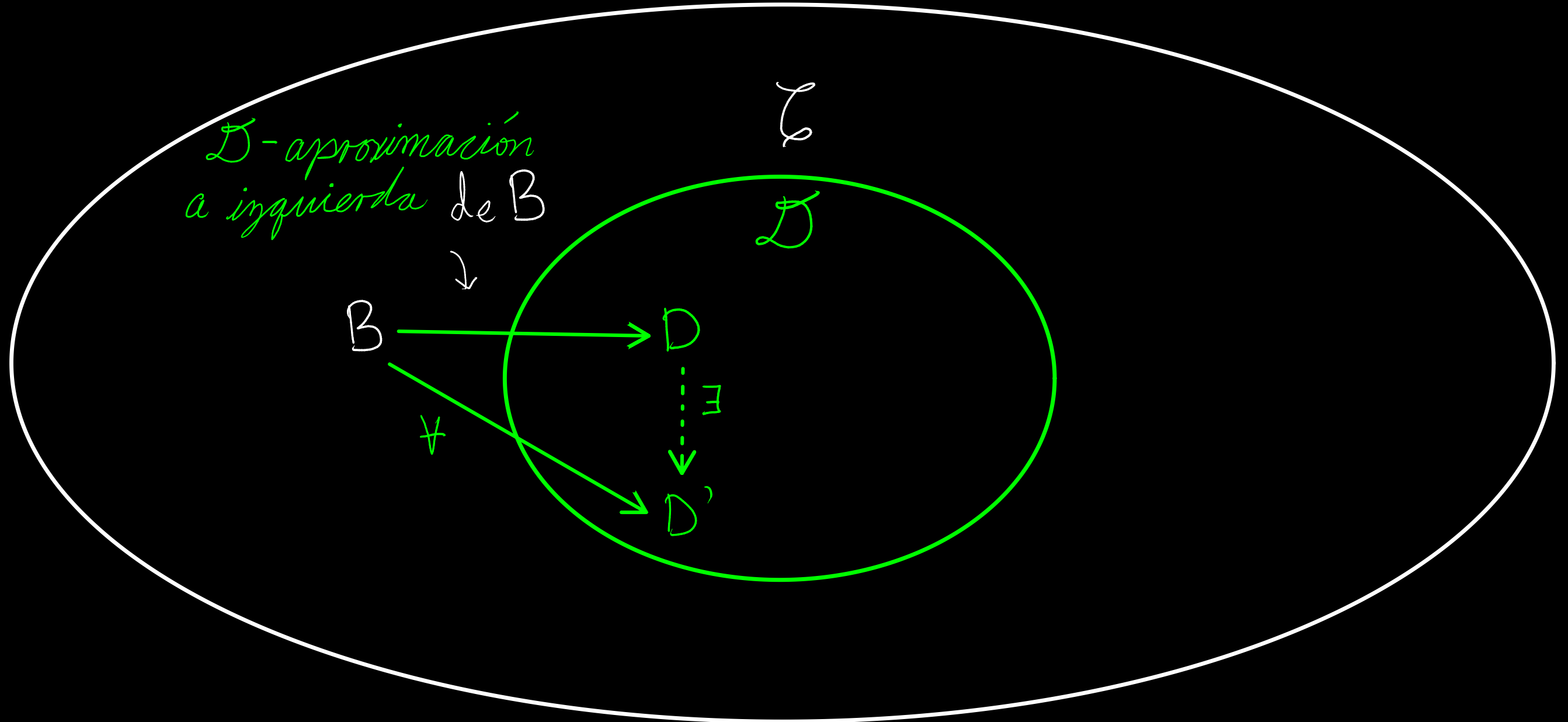
- Las nociones fundamentales para la *mutación silting* son las *aproximaciones*.



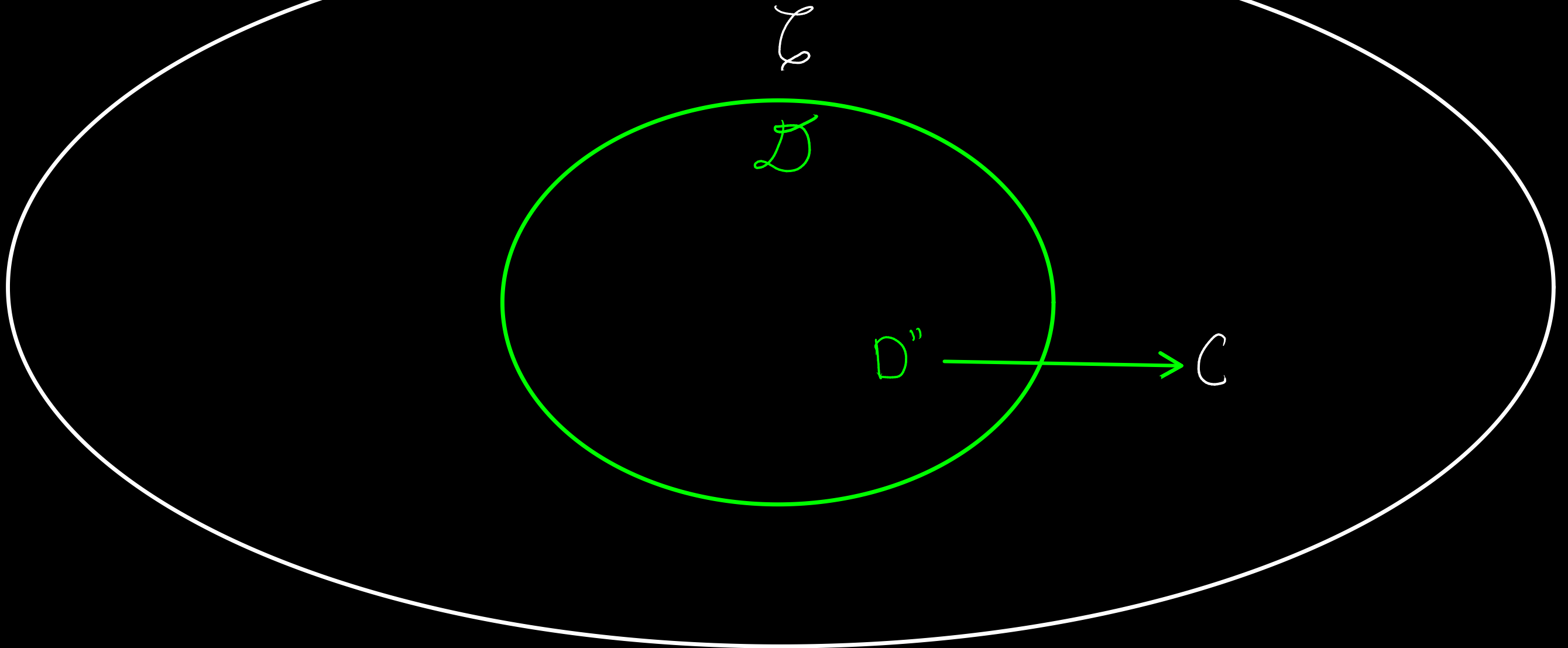
- Las nociones fundamentales para la *mutación silting* son las *aproximaciones*.



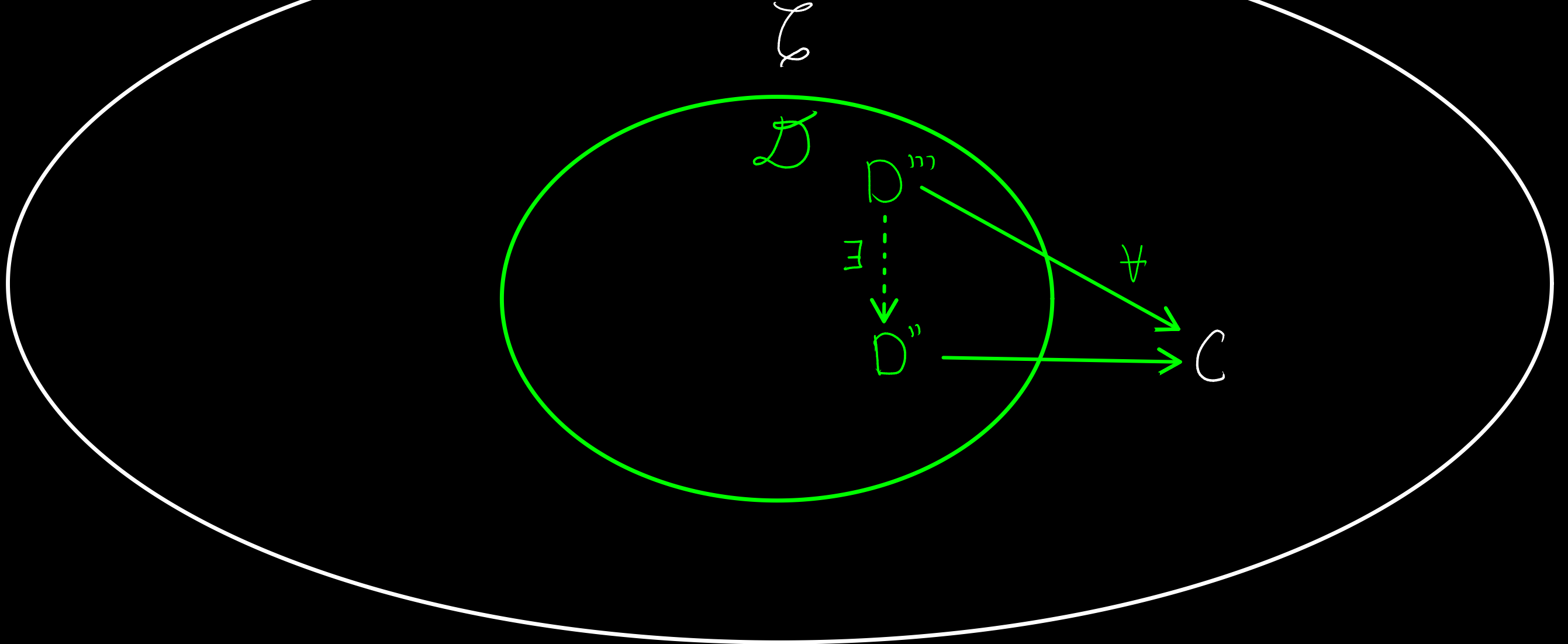
- Las nociones fundamentales para la *mutación silting* son las *aproximaciones*.



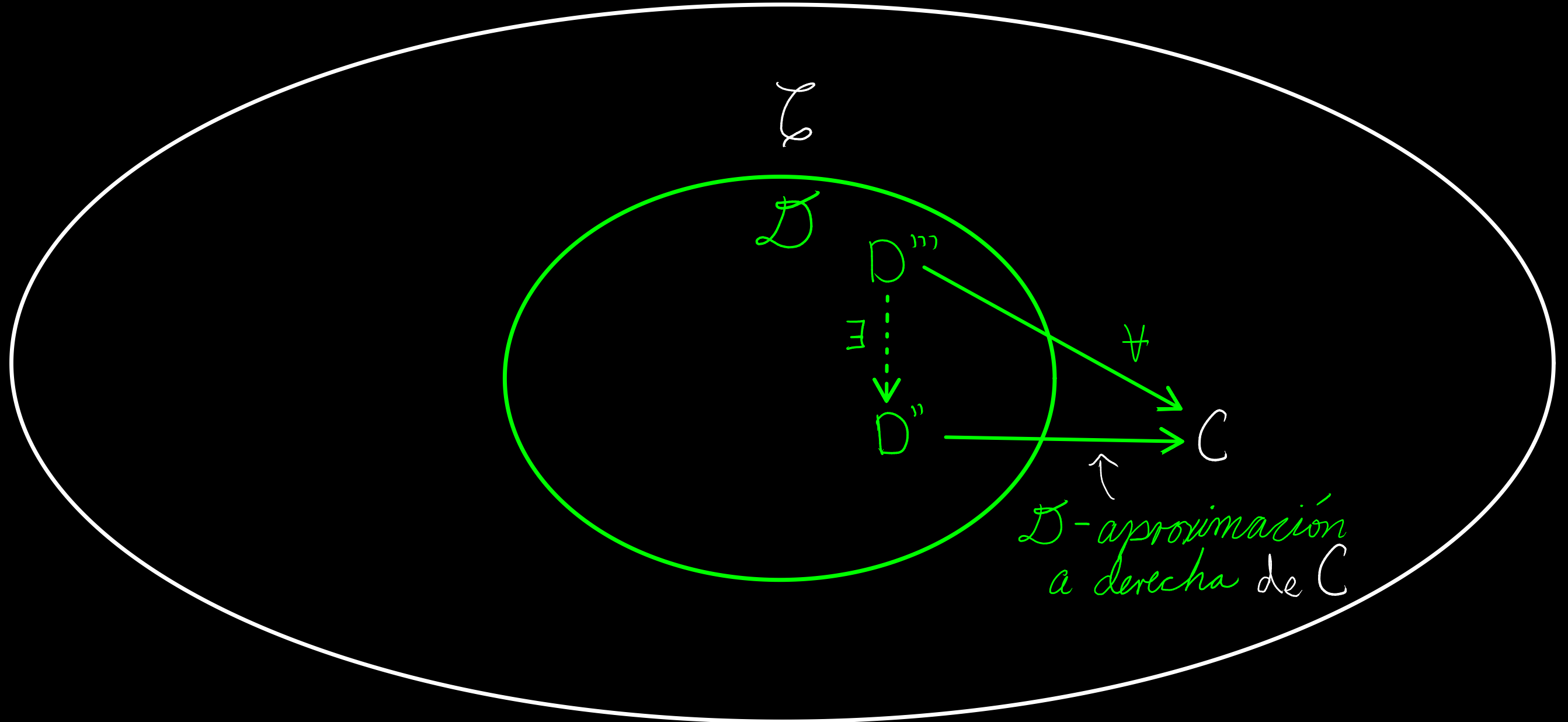
- Las nociones fundamentales para la *mutación silting* son las *aproximaciones*.



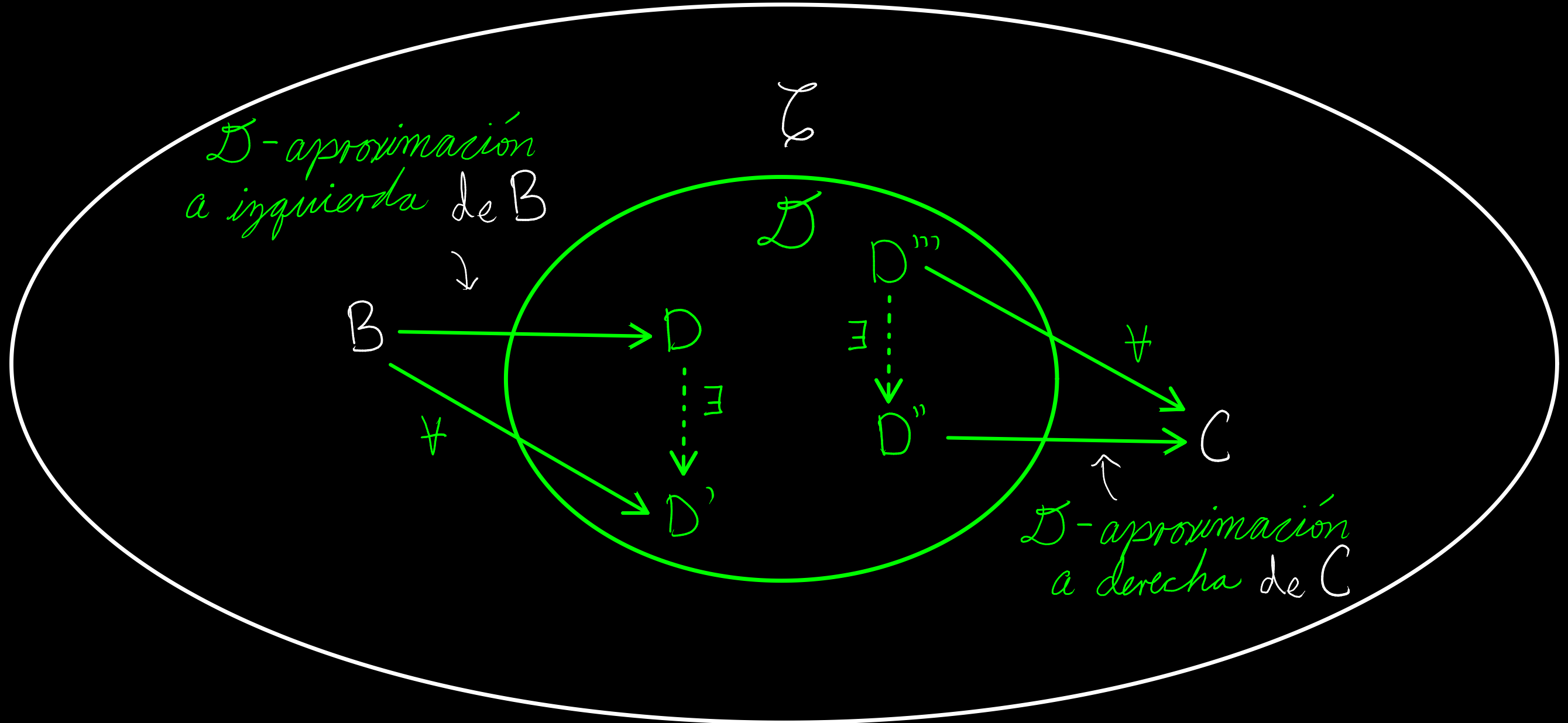
- Las nociones fundamentales para la *mutación silting* son las *aproximaciones*.



- Las nociones fundamentales para la *mutación silting* son las *aproximaciones*.



- Las nociones fundamentales para la *mutación silting* son las *aproximaciones*.



• La mutación a izquierda de un complejo silting básico $S = \bigoplus_{i=1}^n S_i$ en su sumando S_j es

$$S' = \left(\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n S_i \right) \oplus S'_j, \text{ con } S_j \xrightarrow{\vee} \bigoplus_{i=1, i \neq j}^n S_i =: D \rightarrow S'_j \rightarrow S_j[1] \text{ en } K^b(\text{proj } A).$$

• La mutación a izquierda de un complejo silting básico $S = \bigoplus_{i=1}^n S_i$ en su sumando S_j es

add(D) - aproximación
a izquierda

$$S' = \left(\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n S_i \right) \oplus S'_j, \text{ con } S_j \xrightarrow{\quad} \bigoplus_{i=1, i \neq j}^n S_i =: D \rightarrow S'_j \rightarrow S_j[1] \text{ en } K^b(\text{proj } A).$$

• La mutación a izquierda de un complejo silting básico $S = \bigoplus_{i=1}^n S_i$ en su sumando S_j es

$\text{add}(D)$ -aproximación
a izquierda

$$S' = \left(\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n S_i \right) \oplus S'_j, \text{ con } S_j \xrightarrow{\quad} \bigoplus_{i=1, i \neq j}^n S_i =: D \rightarrow S'_j \rightarrow S_j[1] \text{ en } K^b(\text{proj } A).$$

• $S \in K^b(\text{proj } A)$ es un complejo silting sii $\text{add}(S)$ es una subcategoría silting de $K^b(\text{proj } A)$.

• La mutación a izquierda de un complejo silting básico $S = \bigoplus_{i=1}^n S_i$ en su sumando S_j es

add(D) - aproximación
a izquierda

$$S' = \left(\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n S_i \right) \oplus S'_j, \text{ con } S_j \xrightarrow{\quad} \bigoplus_{i=1, i \neq j}^n S_i =: D \rightarrow S'_j \rightarrow S_j[1] \text{ en } K^b(\text{proj } A).$$

• $S \in K^b(\text{proj } A)$ es un complejo silting sii add(S) es una subcategoría silting de $K^b(\text{proj } A)$.

• Si A es de dimensión finita, los complejos silting básicos son mutables en cada sumando y cerrados bajo mutaciones a derecha e izquierda.

• La mutación a izquierda de un complejo silting básico $S = \bigoplus_{i=1}^n S_i$ en su sumando S_j es

add(D) - aproximación
a izquierda

$$S' = \left(\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n S_i \right) \oplus S'_j, \text{ con } S_j \xrightarrow{\quad} \bigoplus_{i=1, i \neq j}^n S_i =: D \rightarrow S'_j \rightarrow S_j[1] \text{ en } K^b(\text{proj } A).$$

• $S \in K^b(\text{proj } A)$ es un complejo silting sii add(S) es una subcategoría silting de $K^b(\text{proj } A)$.

• Si A es de dimensión finita, los complejos silting básicos son mutables en cada sumando y cerrados bajo mutaciones a derecha e izquierda. Para extender la mutación a todos los pares de torsión en mod(A), se desarrolló la teoría cosilting.

Dfn. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* si $\text{Hom}_{D(\text{Mod}(A))}(w^J, w[i]) = 0$ para todo conjunto J e $i > 0$ y la cerradura de w bajo productos, sumandos, extensiones, conos y cocomos $\text{thick}(\text{Prod}(w))$ es $K^b(I_n; A)$.

Dfn. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* si $\text{Hom}_{D(\text{Mod}(A))}(w^J, w[i]) = 0$ para todo conjunto J e $i > 0$ y la cerradura de w bajo productos, sumandos, extensiones, conos y cocomos $\text{thick}(\text{Prod}(w))$ es $K^b(I_n; A)$. Más aún, es de dos términos si $w \in K^{[0,1]}(I_n; A)$.

Dfn. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* si $\text{Hom}_{D(\text{Mod}(A))}(w^J, w[i]) = 0$ para todo conjunto J e $i > 0$ y la cerradura de w bajo productos, sumandos, extensiones, conos y cocomos $\text{thick}(\text{Prod}(w))$ es $K^b(I_n; A)$. Más aún, es de dos términos si $w \in K^{[0,1]}(I_n; A)$.

Obs. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* si, y solo si, $\text{Prod}(w)$ es una subcategoría *silting* de $K^b(I_n; A)$.

Defn. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* si $\text{Hom}_{D(\text{Mod}(A))}(w^J, w[i]) = 0$ para todo conjunto J e $i > 0$ y la cerradura de w bajo productos, sumandos, extensiones, conos y cónicos $\text{thick}(\text{Prod}(w))$ es $K^b(I_n; A)$. Más aún, es de dos términos si $w \in K^{[0,1]}(I_n; A)$.

Obs. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* si, y solo si, $\text{Prod}(w)$ es una subcategoría silting de $K^b(I_n; A)$.

Pgt. ¿Podemos caracterizar y *mutar* complejos cosilting de dos términos en términos de subcategorías silting de $K^{[0,1]}(I_n; A)$?

Dfn. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* si $\text{Hom}_{D(\text{Mod}(A))}(w^J, w[i]) = 0$ para todo conjunto J e $i > 0$ y la cerradura de w bajo productos, sumandos, extensiones, conos y cónicos $\text{thick}(\text{Prod}(w))$ es $K^b(I_n; A)$. Más aún, es de dos términos si $w \in K^{[0,1]}(I_n; A)$.

Obs. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* si, y solo si, $\text{Prod}(w)$ es una subcategoría *silting* de $K^b(I_n; A)$.

Pgt. ¿Podemos caracterizar y *mutar* complejos *cosilting* de dos términos en términos de subcategorías *silting* de $K^{[0,1]}(I_n; A)$?

Obs. $K^{[0,1]}(I_n; A)$ no es triangulada, pero es cerrada bajo extensiones en la categoría triangulada $K^b(I_n; A)$ y, por ende, *extriangulada*.

Prop. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* de dos términos si, y solo si, $\text{Prod}(w)$ es una subcategoría silting de $K^{[0,1]}(I_n; A)$.

Prp. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* de dos términos si, y solo si, $\text{Prod}(w)$ es una subcategoría silting de $K^{[0,1]}(I_n; A)$.

Prp. Si S es una subcategoría silting de $K^{[0,1]}(I_n; A)$ tal que $\text{Prod}(S) = S$, existe un complejo *cosilting* de dos términos $w \in D(\text{Mod}(A))$ tal que $S = \text{Prod}(w)$.

Prop. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* de dos términos si, y solo si, $\text{Prod}(w)$ es una *subcategoría silting* de $K^{[0,1]}(I_n; A)$.

Prop. Si S es una *subcategoría silting* de $K^{[0,1]}(I_n; A)$ tal que $\text{Prod}(S) = S$, existe un *complejo cosilting* de dos términos $w \in D(\text{Mod}(A))$ tal que $S = \text{Prod}(w)$.

Obs. Es posible definir una teoría de mutación para *subcategorías silting* cerradas bajo productos en una categoría extriangulada apropiada.

Prop. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* de dos términos si, y solo si, $\text{Prod}(w)$ es una *subcategoría silting* de $K^{[0,1]}(I_n; A)$.

Prop. Si S es una *subcategoría silting* de $K^{[0,1]}(I_n; A)$ tal que $\text{Prod}(S) = S$, existe un *complejo cosilting* de dos términos $w \in D(\text{Mod}(A))$ tal que $S = \text{Prod}(w)$.

Obs. Es posible definir una teoría de mutación para *subcategorías silting cerradas bajo productos* en una categoría extriangulada apropiada.

Teo. Sean w y w' *complejos cosilting* de dos términos y $\mathcal{D} := \text{Prod}(w) \cap \text{Prod}(w')$. Entonces w' es una *mutación a derecha* de w sii $\text{Prod}(w)$ *mutación a derecha* de $\text{Prod}(w')$ con respecto a $\mathcal{D}$.

Prop. Un complejo $w \in D(\text{Mod}(A))$ es *cosilting* de dos términos si, y solo si, $\text{Prod}(w)$ es una *subcategoría silting* de $K^{[0,1]}(I_n; A)$.

Prop. Si S es una *subcategoría silting* de $K^{[0,1]}(I_n; A)$ tal que $\text{Prod}(S) = S$, existe un *complejo cosilting* de dos términos $w \in D(\text{Mod}(A))$ tal que $S = \text{Prod}(w)$.

Obs. Es posible definir una teoría de mutación para *subcategorías silting cerradas bajo productos* en una categoría extriangulada apropiada.

Teo. Sean w y w' *complejos cosilting* de dos términos y $\mathcal{D} := \text{Prod}(w) \cap \text{Prod}(w')$. Entonces w' es una *mutación a derecha* de w si $\text{Prod}(w)$ *mutación a derecha* de $\text{Prod}(w')$ con respecto a $\mathcal{D}$.

Trabajo futuro: *mutabilidad* de *complejos cosilting* de dos términos sobre A .

¡Gracias!

