Una introducción a las categorías extrianguladas

Diego Alberto Barceló Nieves

Instituto de Matemáticas, UNAM

Director de tesis: Dr. Octavio Mendoza Hernández

octubre de 2022

Contenido

Contenido

Contenido

- Introducción
- Motivación
- Teoría de bifuntores aditivos

Contenido

- Introducción
- Motivación
- Teoría de bifuntores aditivos
- Definición de categoría extriangulada

Contenido

- Introducción
- Motivación
- Teoría de bifuntores aditivos
- Definición de categoría extriangulada
- Propiedades fundamentales de categorías extrianguladas

Contenido

- Introducción
- Motivación
- Teoría de bifuntores aditivos
- Definición de categoría extriangulada
- Propiedades fundamentales de categorías extrianguladas
- Conclusiones y perspectivas

Consideraciones

- Todas las categorías abelianas lo son en el sentido de Mitchell.

Consideraciones

- Todas las categorías abelianas lo son en el sentido de Mitchell.
- Todas las categorías exactas lo son en el sentido de Quillen.

Introducción

Introducción

En 1979, Salce[1] introdujo la noción de *pares de cotorsión* en la categoría de grupos abelianos Ab haciendo la siguiente

Observación Para $\mathcal{S} \subseteq \mathsf{Ab}$, la clase de los grupos abelianos V tales que todo $S \in \mathcal{S}$ es proyectivo con respecto a todas las sucesiones exactas cortas de la forma

$$0 \to V \longrightarrow W \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

se puede caracterizar con el funtor $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}$ como sigue:

$$\{ V \in \mathsf{Ab} \mid \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(S, V) = 0 \ \forall S \in \mathcal{S} \}.$$

Introducción

En 1979, Salce[1] introdujo la noción de *pares de cotorsión* en la categoría de grupos abelianos Ab haciendo la siguiente

Observación Para $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{Ab}$, la clase de los grupos abelianos V tales que todo $S \in \mathcal{S}$ es proyectivo con respecto a todas las sucesiones exactas cortas de la forma

$$0 \to V \to W \to Y \to 0$$

se puede caracterizar con el funtor $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}$ como sigue:

$$\{V \in \mathbf{Ab} \mid \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(S, V) = 0 \ \forall S \in \mathcal{S}\}.$$

Más aún, notó que la observación dual también es válida.

Definición Un *par de cotorsión* $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ en Ab es un par $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ de subcategorías plenas de Ab que cumple las siguientes condiciones.

(1) $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathcal{U},\mathcal{V}) = 0$.

(2) $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(U,X)=0 \ \forall U\in\mathcal{U} \Rightarrow X\in\mathcal{V}$.

(3) $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(Z,V)=0 \ \forall V\in\mathcal{V} \Rightarrow Z\in\mathcal{U}$.

Definición Un par de cotorsión $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ en Ab es un par $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ de subcategorías plenas de Ab que cumple las siguientes condiciones.

(1) $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathcal{U},\mathcal{V})=0$.

(2) $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(U,X)=0\ \forall U\in\mathcal{U} \Rightarrow X\in\mathcal{V}$.

(3) $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(Z,V)=0\ \forall V\in\mathcal{V} \Rightarrow Z\in\mathcal{U}$.

Observación Las condiciones anteriores equivalen a las siguientes.

(*) $Z\in\mathcal{U} \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(Z,V)=0\ \forall V\in\mathcal{V}$.

(**) $X\in\mathcal{V} \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(U,X)=0\ \forall U\in\mathcal{U}$.

Definición Un par de cotorsión $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ en Ab es un par $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ de subcategorías plenas de Ab que cumple las siguientes condiciones.

(1) $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathcal{U},\mathcal{V})=0$.

(2) $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(U,X)=0 \;\; \forall U\in\mathcal{U} \Rightarrow X\in\mathcal{V}$.

(3) $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(Z,V)=0 \;\; \forall V\in\mathcal{V} \Rightarrow Z\in\mathcal{U}$.

Observación Las condiciones anteriores equivalen a las siguientes.

(*) $Z\in\mathcal{U} \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(Z,V)=0 \;\; \forall V\in\mathcal{V}$. $\left(\mathcal{U}={}^{\perp_1}\mathcal{V}\right)$

(**) $X\in\mathcal{V} \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(U,X)=0 \;\; \forall U\in\mathcal{U}$. $\left(\mathcal{V}=\mathcal{U}^{\perp_1}\right)$

Introducción

Definición Un *par de cotorsión* $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ en $\mathcal{B}$ es un par $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ de subcategorías plenas de $\mathcal{B}$ que cumple las siguientes condiciones.

(1) $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$.

(2) $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{B}}(U, X) = 0 \ \forall U \in \mathcal{U} \Rightarrow X \in \mathcal{V}$.

(3) $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{B}}(Z, V) = 0 \ \forall V \in \mathcal{V} \Rightarrow Z \in \mathcal{U}$.

Observación Las condiciones anteriores equivalen a las siguientes.

(*) $Z \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{B}}(Z, V) = 0 \ \forall V \in \mathcal{V}$. $\quad (\mathcal{U} = {}^{\perp_1}\mathcal{V})$

(**) $X \in \mathcal{V} \Leftrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{B}}(U, X) = 0 \ \forall U \in \mathcal{U}$. $\quad (\mathcal{V} = \mathcal{U}^{\perp_1})$

Definición Un par de cotorsión $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ en $\mathcal{B}$ es un par $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ de subcategorías plenas de $\mathcal{B}$ que cumple las siguientes condiciones.

(1) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{U},\mathcal{V})=0$.

(2) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(U,X)=0\ \forall U\in\mathcal{U} \Rightarrow X\in\mathcal{V}$.

(3) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(Z,V)=0\ \forall V\in\mathcal{V} \Rightarrow Z\in\mathcal{U}$.

Más aún, $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ es completo si cumple las siguientes condiciones.

(4) Para cualquier $C\in\mathcal{B}$, existe una sucesión exacta corta $0\to V^C\to U^C\to C\to 0$ tal que $U^C\in\mathcal{U}$ y $V^C\in\mathcal{V}$.

(5) Para cualquier $C\in\mathcal{B}$, existe una sucesión exacta corta $0\to C\to V_C\to U_C\to 0$ tal que $U_C\in\mathcal{U}$ y $V_C\in\mathcal{V}$.

Definición Un par de cotorsión (completo) $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ en $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ es un par $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ de subcategorías plenas de $\mathcal{A}$, cerradas por sumandos directos en $\mathcal{A}$, tal que cumple las siguientes condiciones.

(1) $\mathrm{Ext}^1_{(\mathcal{A},\mathcal{E})}(\mathcal{U},\mathcal{V})=0$.

(2) Para cualquier $C\in\mathcal{A}$, existe una sucesión exacta corta $V^C\to U^C\to C$ tal que $U^C\in\mathcal{U}$ y $V^C\in\mathcal{V}$.

(3) Para cualquier $C\in\mathcal{A}$, existe una sucesión exacta corta $C\to V_C\to U_C$ tal que $U_C\in\mathcal{U}$ y $V_C\in\mathcal{V}$.

Definición Un *par de cotorsión* (completo) $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ en $(\mathcal{A},T,\Delta)$ es un par $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ de subcategorías aditivas plenas de $\mathcal{A}$, cerradas por sumandos directos en $\mathcal{A}$, tal que cumple las siguientes condiciones.

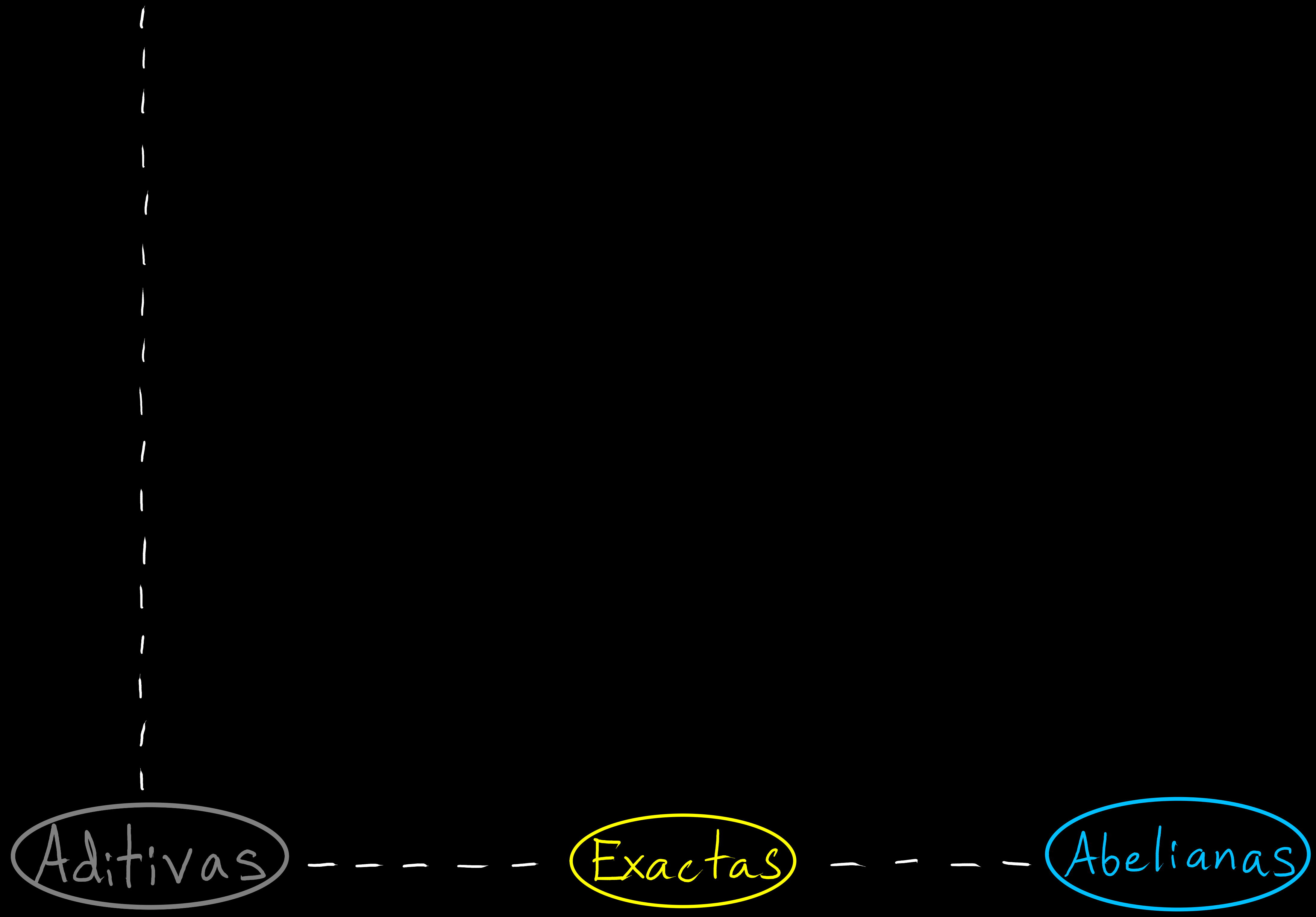
(1) $\mathrm{Ext}^1_{(\mathcal{A},T,\Delta)}(\mathcal{U},\mathcal{V})=0$

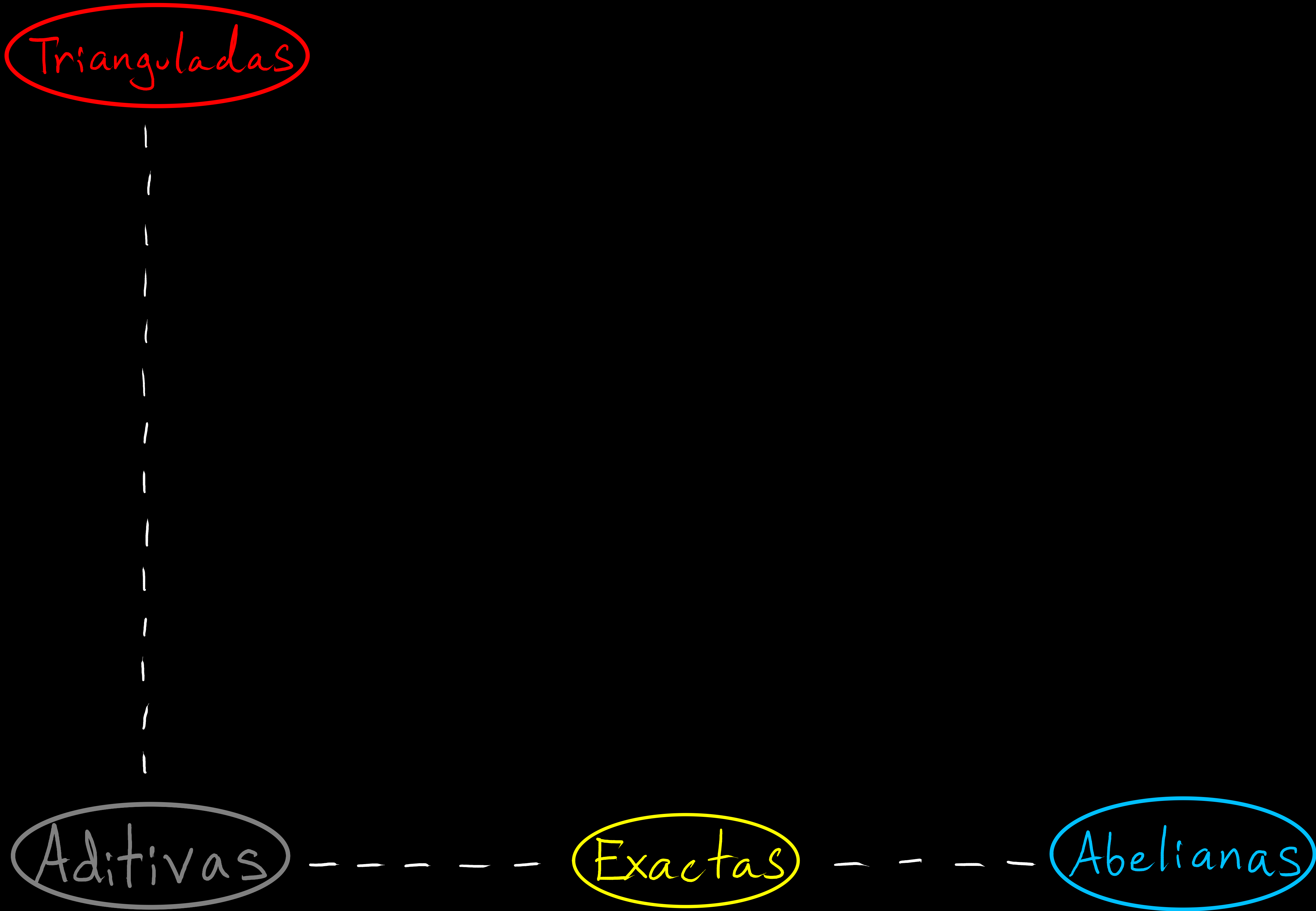
(2) Para cualquier $C\in\mathcal{A}$, existe un triángulo distinguido $V\longrightarrow U\longrightarrow C\longrightarrow T(V)$ tal que $U\in\mathcal{U}$ y $V\in\mathcal{V}$.

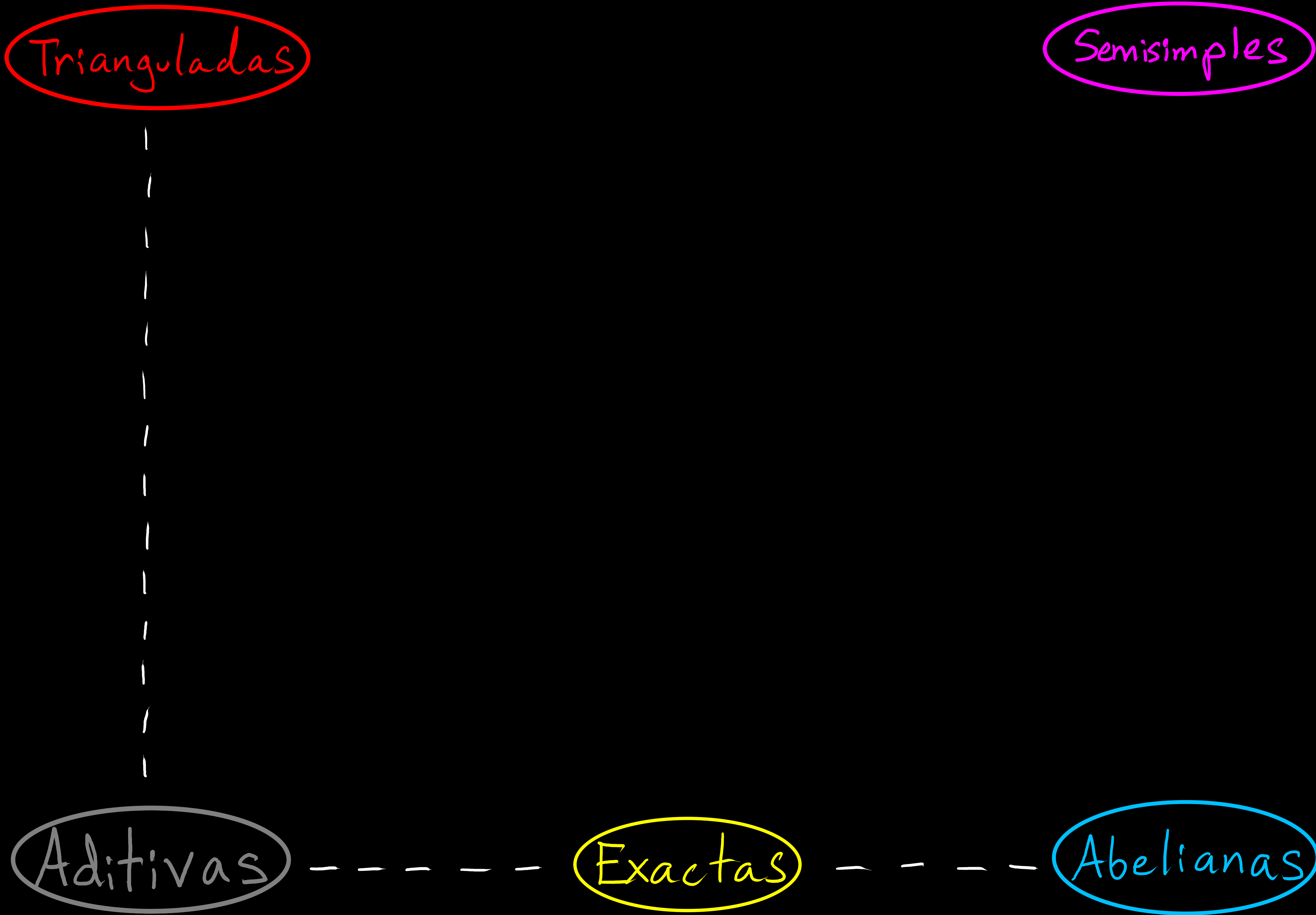
Aditivas

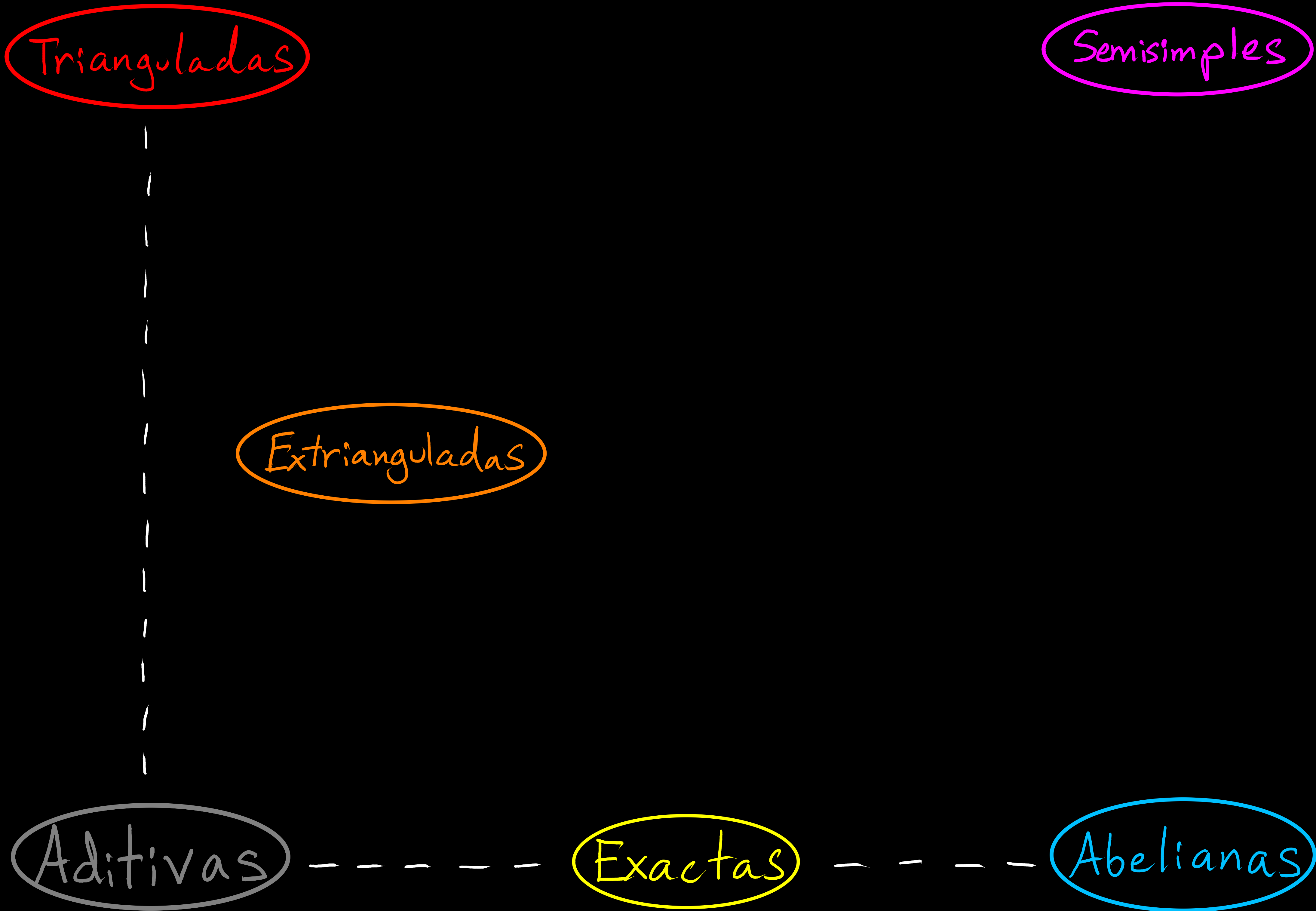
Aditivas

Abelianas


Aditivas
Exactas
Abelianas


Trianguladas
Aditivas
Exactas
Abelianas


Trianguladas
Semisimples
Aditivas
Exactas
Abelianas


Trianguladas
Semisimples
Extrianguladas
Aditivas
Exactas
Abelianas

Motivación

Motivación

- Se conoce una relación entre las categorías exactas y las trianguladas, dada por las cat. de Frobenius y sus cat. estables asociadas[2].

Motivación

- Se conoce una relacion entre las categorías exactas y las trianguladas, dada por las cat. de Frobenius y sus cat. estables asociadas[2].

- Muchos resultados de naturaleza homológica son válidos tanto en cat. exactas como en cat. trianguladas.

Motivación

- Se conoce una relación entre las categorías exactas y las trianguladas, dada por las cat. de Frobenius y sus cat. estables asociadas[2].
- Muchos resultados de naturaleza homológica son válidos tanto en cat. exactas como en cat. trianguladas.
- Los procesos de "adaptación de pruebas" para transferir resultados de un tipo de categoría a otra suelen ser difíciles.

Motivación

- Se conoce una relación entre las categorías exactas y las trianguladas, dada por las cat. de Frobenius y sus cat. estables asociadas[2].

- Muchos resultados de naturaleza homológica son válidos tanto en cat. exactas como en cat. trianguladas.

- Los procesos de "adaptación de pruebas" para transferir resultados de un tipo de categoría a otra suelen ser difíciles.

El uso de categorías extrianguladas remueve dificultades encontradas durante este proceso.

Motivación

- Se conoce una relación entre las categorías exactas y las trianguladas, dada por las cat. de Frobenius y sus cat. estables asociadas[2].
- Muchos resultados de naturaleza homológica son válidos tanto en cat. exactas como en cat. trianguladas.
- Los procesos de "adaptación de pruebas" para transferir resultados de un tipo de categoría a otra suelen ser difíciles.

El uso de categorías extrianguladas remueve dificultades encontradas durante este proceso[3]. Su definición se obtuvo axiomatizando las propiedades de los bifuntores aditivos Ext^1 relevantes para los pares de cotorsión (completos).

Teoría de bifuntores aditivos

Recordatorio Una categoría $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría si

- para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ tiene estructura de grupo abeliano, y
- la composición de morfismos en $\mathcal{C}$ es bilineal.

Recordatorio Una categoría $\mathscr{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría si

- para cualesquiera $A, B \in \mathscr{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ tiene estructura de grupo abeliano, y
- la composición de morfismos en $\mathscr{C}$ es bilineal.

Observación Si $\mathscr{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría, entonces su categoría opuesta $\mathscr{C}^{op}$ también lo es.

Recordatorio Una categoría $\mathscr{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría si

- para cualesquiera $A, B \in \mathscr{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ tiene estructura de grupo abeliano, y
- la composición de morfismos en $\mathscr{C}$ es bilineal.

Observación Si $\mathscr{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría, entonces su categoría opuesta $\mathscr{C}^{op}$ también lo es.

Observación La categoría producto de dos $\mathbb{Z}$-categorías es una $\mathbb{Z}$-categoría. En particular, si $\mathscr{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría, entonces $\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C}$ también lo es.

Recordatorio Una categoría $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría si

- para cualesquiera $A, B \in \mathcal{C}$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ tiene estructura de grupo abeliano, y
- la composición de morfismos en $\mathcal{C}$ es bilineal.

Observación Si $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría, entonces su categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$ también lo es.

Observación La categoría producto de dos $\mathbb{Z}$-categorías es una $\mathbb{Z}$-categoría. En particular, si $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría, entonces $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$ también lo es.

Ejemplo La categoría de grupos abelianos Ab es una $\mathbb{Z}$-categoría.

Recordatorio Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ $\mathbb{Z}$-categorías. Un funtor (covariante) $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es *aditivo* si $F : \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),F(Y))$ es un morfismo de grupos abelianos para cualesquiera $X, Y \in \mathscr{C}$.

Recordatorio Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ $\mathbb{Z}$-categorías. Un funtor (covariante) $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ es aditivo si $F:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ es un morfismo de grupos abelianos para cualesquiera $X,Y\in\mathcal{C}$.

Recordatorio Un ***bifuntor*** es un funtor cuyo dominio es una categoría producto de la forma $\mathcal{C}'\times\mathcal{C}$, con $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ categorías.

Recordatorio Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ $\mathbb{Z}$-categorías. Un funtor (covariante) $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es aditivo si $F: \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ es un morfismo de grupos abelianos para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$.

Recordatorio Un *bifuntor* es un funtor cuyo dominio es una categoría producto de la forma $\mathcal{C}' \times \mathcal{C}$, con $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ categorías.

Ejemplo Si $\mathcal{C}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría, entonces el bifuntor

$$\mathrm{Hom}(-,-): \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$$

es aditivo.

Definición Sean $\mathscr{C}$ una $\mathbb{Z}$-categoría, $\mathbb{E}: \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to Ab$ un bifuntor aditivo y $A, A', C, C' \in \mathscr{C}$. Definimos las correspondencias

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A') \times \mathbb{E}(C, A) &\to \mathbb{E}(C, A'), \\ (a, \delta) &\mapsto a \cdot \delta := \mathbb{E}(C, a)(\delta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(C, A) \times \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(C', C) &\to \mathbb{E}(C', A) \\ (\delta, c) &\mapsto \delta \cdot c := \mathbb{E}(c^{op}, A)(\delta). \end{aligned}$$

Proposición Sean $\mathcal{C}$ una $\mathbb{Z}$-categoría y $\mathbb{E}:\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}\to Ab$ un bifuntor aditivo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $a\cdot(\delta_1+\delta_2)=a\cdot\delta_1+a\cdot\delta_2$ $\quad\forall\, a\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A'),\ \delta_1,\delta_2\in\mathbb{E}(C,A)$.

(b) $(a_1+a_2)\cdot\delta=a_1\cdot\delta+a_2\cdot\delta$ $\quad\forall\, a_1,a_2\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A'),\ \delta\in\mathbb{E}(C,A)$.

(c) $1_A\cdot\delta=\delta$ $\quad\forall\, \delta\in\mathbb{E}(C,A)$.

(d) $(a'a)\cdot\delta=a'\cdot(a\cdot\delta)$ $\quad\forall\, a\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A'),\ a'\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A',A''),\ \delta\in\mathbb{E}(C,A)$.

Proposición Sean $\mathscr{C}$ una $\mathbb{Z}$-categoría y $\mathbb{E}: \mathscr{C}^{op} \times \mathscr{C} \to Ab$ un bifuntor aditivo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $a \cdot (\delta_1 + \delta_2) = a \cdot \delta_1 + a \cdot \delta_2 \quad \forall\, a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A'),\ \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{E}(C, A).$

(b) $(a_1 + a_2) \cdot \delta = a_1 \cdot \delta + a_2 \cdot \delta \quad \forall\, a_1, a_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A'),\ \delta \in \mathbb{E}(C, A).$

(c) $1_A \cdot \delta = \delta \quad \forall\, \delta \in \mathbb{E}(C, A).$

(d) $(a'a) \cdot \delta = a' \cdot (a \cdot \delta) \quad \forall\, a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A'),\ a' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A', A''),\ \delta \in \mathbb{E}(C, A).$

(e) $(\delta_1 + \delta_2) \cdot c = \delta_1 \cdot c + \delta_2 \cdot c \quad \forall\, c \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C', C),\ \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{E}(C, A).$

(f) $\delta \cdot (c_1 + c_2) = \delta \cdot c_1 + \delta \cdot c_2 \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C', C),\ \delta \in \mathbb{E}(C, A).$

(g) $\delta \cdot 1_C = \delta \quad \forall\, \delta \in \mathbb{E}(C, A).$

(h) $\delta \cdot (cc') = (\delta \cdot c) \cdot c' \quad \forall\, c \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C', C),\ c' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C'', C'),\ \delta \in \mathbb{E}(C, A).$

Proposición Sean $\mathcal{C}$ una $\mathbb{Z}$-categoría y $\mathbb{E}:\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{C}\to Ab$ un bifuntor aditivo. Entonces, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) $a\cdot(\delta_1+\delta_2)=a\cdot\delta_1+a\cdot\delta_2$ $\forall\, a\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A'),\ \delta_1,\delta_2\in\mathbb{E}(C,A)$.

(b) $(a_1+a_2)\cdot\delta=a_1\cdot\delta+a_2\cdot\delta$ $\forall\, a_1,a_2\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A'),\ \delta\in\mathbb{E}(C,A)$.

(c) $1_A\cdot\delta=\delta$ $\forall\,\delta\in\mathbb{E}(C,A)$.

(d) $(a'a)\cdot\delta=a'\cdot(a\cdot\delta)$ $\forall\, a\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A'),\ a'\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A',A''),\ \delta\in\mathbb{E}(C,A)$.

(e) $(\delta_1+\delta_2)\cdot c=\delta_1\cdot c+\delta_2\cdot c$ $\forall\, c\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C',C),\ \delta_1,\delta_2\in\mathbb{E}(C,A)$.

(f) $\delta\cdot(c_1+c_2)=\delta\cdot c_1+\delta\cdot c_2$ $\forall\, c_1,c_2\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C',C),\ \delta\in\mathbb{E}(C,A)$.

(g) $\delta\cdot 1_C=\delta$ $\forall\,\delta\in\mathbb{E}(C,A)$.

(h) $\delta\cdot(cc')=(\delta\cdot c)\cdot c'$ $\forall\, c\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C',C),\ c'\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C'',C'),\ \delta\in\mathbb{E}(C,A)$.

(i) $a\cdot(\delta\cdot c)=(a\cdot\delta)\cdot c$ $\forall\, a\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A'),\ c\in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C',C),\ \delta\in\mathbb{E}(C,A)$.

(j) $0\cdot\delta=0=\delta\cdot 0$ $\forall\,\delta\in\mathbb{E}(C,A)$.

Recordatorio. Una categoría *aditiva* $\mathcal{A}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría con coproductos finitos, los cuales denotaremos utilizando el símbolo $\oplus$.

Recordatorio. Una categoría *aditiva* $\mathcal{A}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría con coproductos finitos, los cuales denotaremos utilizando el símbolo $\oplus$.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva. Una *subcategoría aditiva* de $\mathcal{A}$ es una subcategoría $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}'$ es una categoría aditiva y todo coproducto finito en $\mathcal{A}'$ es un coproducto finito en $\mathcal{A}$.

Recordatorio. Una categoría aditiva $\mathcal{A}$ es una $\mathbb{Z}$-categoría con coproductos finitos, los cuales denotaremos utilizando el símbolo $\oplus$.

Definición. Sea $\mathcal{A}$ una categoría aditiva. Una subcategoría aditiva de $\mathcal{A}$ es una subcategoría $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}'$ es una categoría aditiva y todo coproducto finito en $\mathcal{A}'$ es un coproducto finito en $\mathcal{A}$.

Nota. En todo lo que sigue, $\mathcal{A}$ representará una categoría aditiva y $\mathbb{E}$, un bifuntor aditivo de $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$ en Ab.

Definición de categoría extriangulada

Idea: El bifuntor Ext^1 tiene propiedades "lo suficientemente interesantes" como para querer interpretar a cualquier bifuntor aditivo a través de ellas.

Definición Para cualesquiera $A, C \in \mathscr{C}$, una $\mathbb{E}$-*extensión* es un elemento $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$. Por ende, formalmente, una $\mathbb{E}$-extensión es una terna (A, δ, C). En particular, decimos que el elemento $0 \in \mathbb{E}(C, A)$ es la $\mathbb{E}$-*extensión escindible*.

Definición Para cualesquiera $A, C \in \mathcal{A}$, una $\mathbb{E}$-*extensión* es un elemento $\delta \in \mathbb{E}(C,A)$. Por ende, formalmente, una $\mathbb{E}$-extensión es una terna (A, δ, C). En particular, decimos que el elemento $0 \in \mathbb{E}(C,A)$ es la $\mathbb{E}$-*extensión escindible*.

Definición Sean (A,δ,C) y (A',δ',C') $\mathbb{E}$-extensiones. Un par de morfismos $a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A,A')$ y $c \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C,C')$ es un *morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones* si $a \cdot \delta = \delta' \cdot c$, y lo denotamos por $(a,c) : \delta \to \delta'$.

Definición Sean $A, C \in \mathscr{A}$. Dos sucesiones de morfismos $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ y $A \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C$ en $\mathscr{A}$ son *equivalentes* si existe un isomorfismo $b \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B, B')$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "y"] \arrow[d, "b", "\wr"'] & \\ A \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "x'"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & B' \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & C. \\ & B' \arrow[ur, "y'"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Definición Sean $A, C \in \mathcal{A}$. Dos sucesiones de morfismos $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ y $A \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C$ en $\mathcal{A}$ son *equivalentes* si existe un isomorfismo $b \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, B')$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "y"] \arrow[d, "b", "\wr"'] & \\ A \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "x'"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & B' \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & C. \\ & B' \arrow[ur, "y'"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Esto es una relación de equivalencia; denotamos las clases con corchetes $[-]$.

Definición Sean $A, C \in \mathcal{A}$. Dos sucesiones de morfismos $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ y $A \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C$ en $\mathcal{A}$ son *equivalentes* si existe un isomorfismo $b \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(B, B')$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "y"] \arrow[d, "b", "\wr"'] & \\ A \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "x'"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & B' \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & C. \\ & B' \arrow[ur, "y'"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Esto es una relación de equivalencia; denotamos las clases con corchetes ($[\ ]$).

Para cualesquiera $A, C \in \mathcal{A}$, denotamos $0 := [A \xrightarrow{\binom{1}{0}} A \oplus C \xrightarrow{(0\ 1)} C]$.

Definición Sean $A, C \in \mathcal{A}$. Dos sucesiones de morfismos $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ y $A \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C$ en $\mathcal{A}$ son *equivalentes* si existe un isomorfismo $b \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(B, B')$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "y"] \arrow[dd, "b", "\wr"'] & \\ A \arrow[ur, "x"] \arrow[dr, "x'"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & C. \\ & B' \arrow[ur, "y'"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

Esto es una relación de equivalencia; denotamos las clases con corchetes ($[\;]$).

Para cualesquiera $A, C \in \mathcal{A}$, denotamos $0 := [A \xrightarrow{\binom{1}{0}} A \oplus C \xrightarrow{(0\ 1)} C]$.

Para cualesquiera dos clases de sucesiones de morfismos $[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ y $[A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$, denotamos

$$[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C] \oplus [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C'] := [A \oplus A' \xrightarrow{x \oplus x'} B \oplus B' \xrightarrow{y \oplus y'} C \oplus C'].$$

Definición Una *realización* de $\mathbb{E}$ es una correspondencia $\mathfrak{s}$ que asocia a cada $\mathbb{E}$-extensión $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ una clase de equivalencia $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ tal que se cumple la siguiente condición.

(∗) Sean $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ y $\delta' \in \mathbb{E}(C', A')$, con $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ y $\mathfrak{s}(\delta') = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$.

Entonces, para cualquier morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones $(a, c) : \delta \to \delta'$, existe un morfismo $b \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, B')$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[d, "c"] \\
A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C'.
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

Definición Una *realización* de $\mathbb{E}$ es una correspondencia $\mathfrak{s}$ que asocia a cada $\mathbb{E}$-extensión $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ una clase de equivalencia $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ tal que se cumple la siguiente condición.

(*) Sean $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ y $\delta' \in \mathbb{E}(C', A')$, con $\mathfrak{s}(\delta) = [A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$ y $\mathfrak{s}(\delta') = [A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$. Entonces, para cualquier morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones $(a, c) : \delta \to \delta'$, existe un morfismo $b \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, B')$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[d, "c"] \\
A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C'.
\end{tikzcd}
\qquad (2)
$$

En este caso, decimos que $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ *realiza* a δ y que (a, b, c) *realiza* a (a, c).

Una ***realización*** $\mathfrak{s}$ de $\mathbb{E}$ es ***aditiva*** si cumple las siguientes condiciones.

(i) Para cualesquiera $A, C \in \mathcal{A}$, $0 \in \mathbb{E}(C, A)$ satisface $\mathfrak{s}(0) = 0$.

Una *realización* $\mathfrak{s}$ de $\mathbb{E}$ es *aditiva* si cumple las siguientes condiciones.

(i) Para cualesquiera $A, C \in \mathcal{A}$, $0 \in \mathbb{E}(C, A)$ satisface $\mathfrak{s}(0) = 0$.

(ii) Para cualesquiera $\mathbb{E}$-extensiones $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$, $\delta' \in \mathbb{E}(C', A')$, se tiene que

$$\mathfrak{s}(\delta \oplus \delta') = \mathfrak{s}(\delta) \oplus \mathfrak{s}(\delta').$$

Una ***realización*** $\mathfrak{s}$ de $\mathbb{E}$ es ***aditiva*** si cumple las siguientes condiciones.

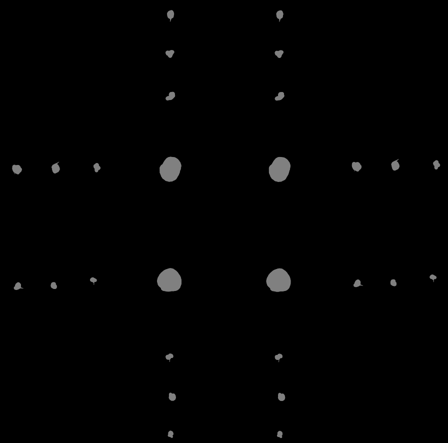
(i) Para cualesquiera $A, C \in \mathcal{A}$, $0 \in \mathbb{E}(C, A)$ satisface $\mathfrak{s}(0) = 0$.

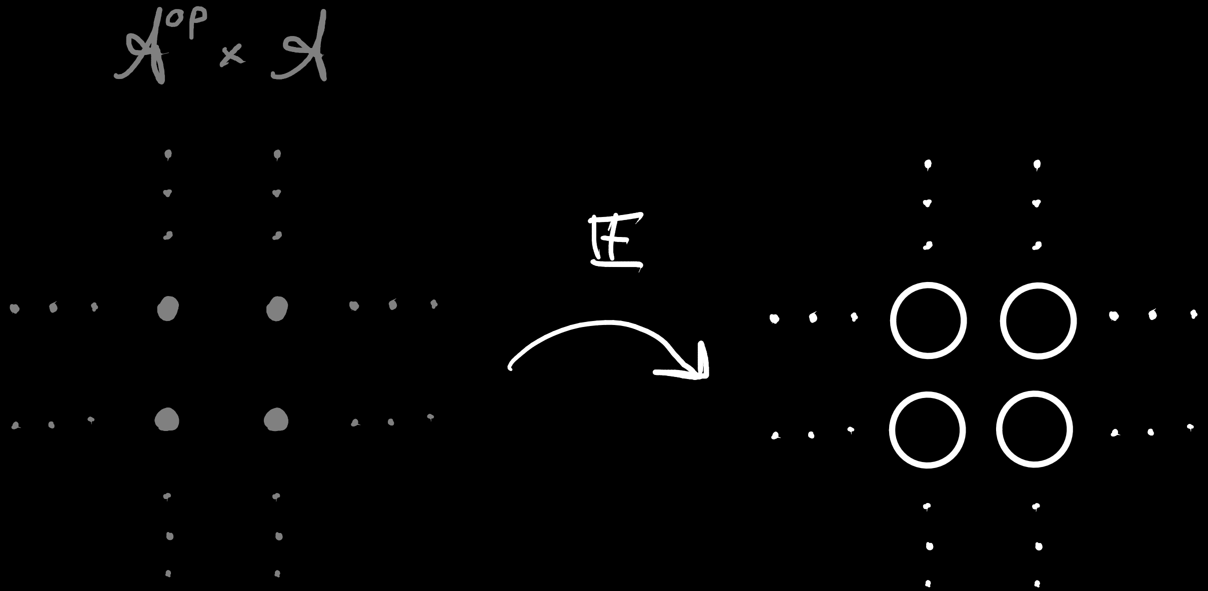
(ii) Para cualesquiera $\mathbb{E}$-extensiones $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$, $\delta' \in \mathbb{E}(C', A')$, se tiene que

$$\mathfrak{s}(\delta \oplus \delta') = \mathfrak{s}(\delta) \oplus \mathfrak{s}(\delta').$$

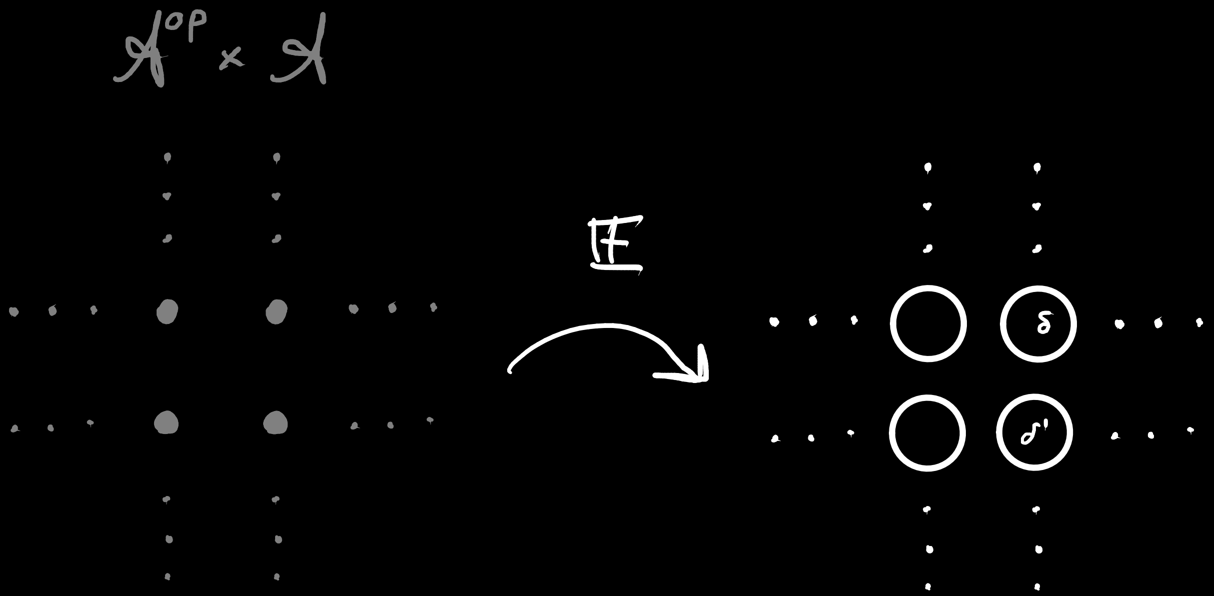
Nota En todo lo que sigue, $\mathfrak{s}$ representará una realización aditiva.

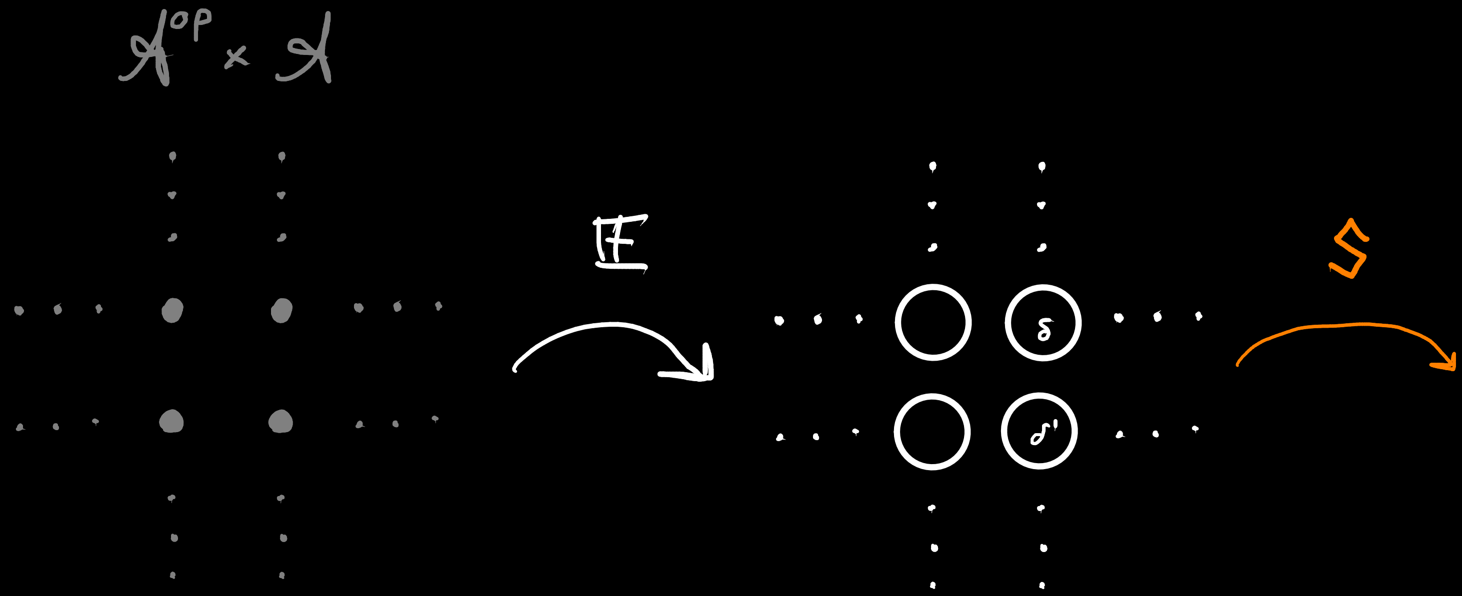
$\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$

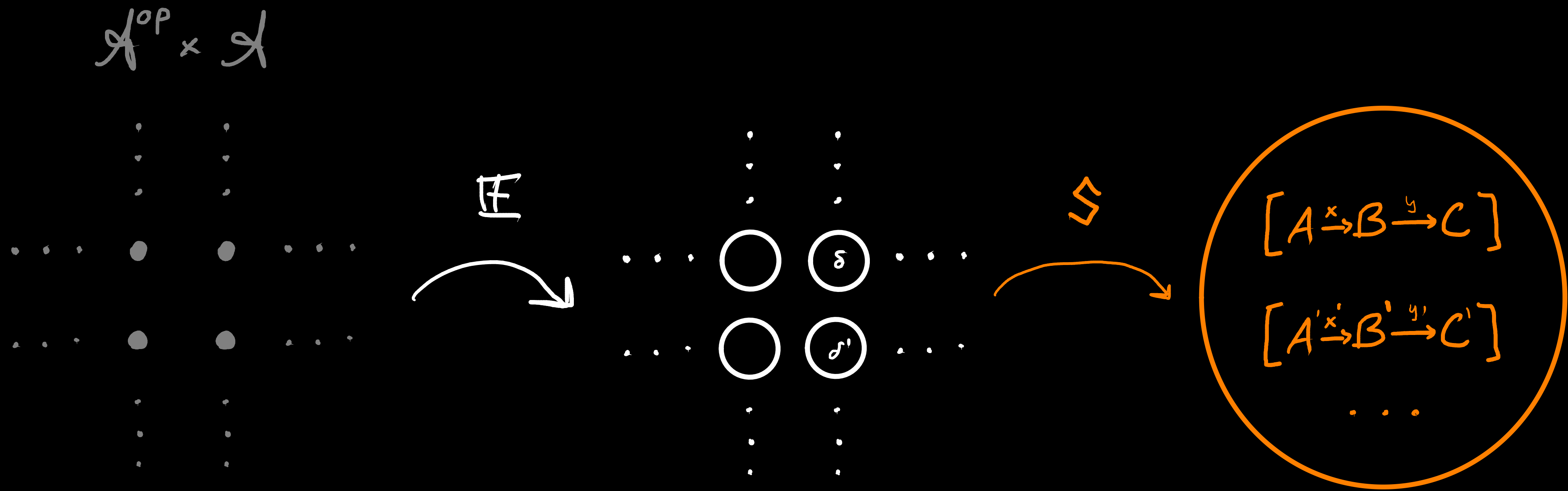




$\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$
$\mathbb{F}$


$\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$
$\mathbb{F}$
δ
δ'


$\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$
$\mathbb{F}$
δ
δ'
S



$\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A}$
$\mathbb{F}$
δ
δ'
S
$[A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C]$
$[A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C']$
...

Definición Consideremos una terna $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$.

Definición Consideremos una terna $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$.

(a) Un *$\mathbb{E}$-triángulo* es un par $(A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C, \delta)$, donde la sucesión $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ realiza a $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$, y lo denotamos por

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}.$$

Definición Consideremos una terna $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$.

(a) Un *$\mathbb{E}$-triángulo* es un par $(A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C, \delta)$, donde la sucesión $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ realiza a $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$, y lo denotamos por

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}.$$

Esto *no necesariamente* implica que δ sea un morfismo en $\mathscr{A}$ con dominio C.

Definición Consideremos una terna $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$.

(a) Un *$\mathbb{E}$-triángulo* es un par $(A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C, \delta)$, donde la sucesión $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ realiza a $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$, y lo denotamos por

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}.$$

Esto *no necesariamente* implica que δ sea un morfismo en $\mathscr{A}$ con dominio C.

(b) Sean $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ y $A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C' \overset{\delta'}{\dashrightarrow}$ $\mathbb{E}$-triángulos. Un *morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos* es una terna (a, b, c) que realiza al morfismo de $\mathbb{E}$-extensiones $(a, c): \delta \to \delta'$ como en (2), y lo denotamos por

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "c"] & {} \\
A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"'] & {}
\end{tikzcd}$$

(c) Una *conflación* es una sucesión $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ que realiza a alguna $\mathbb{E}$-extensión $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$.

(c) Una *conflación* es una sucesión $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ que realiza a alguna $\mathbb{E}$-extensión $\delta \in \mathbb{E}(C,A)$.

(d) Una *inflación* es un morfismo f en $\mathcal{A}$ que admite una conflación $A \xrightarrow{f} B \to C$.

(c) Una *conflación* es una sucesión $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ que realiza a alguna $\mathbb{E}$-extensión $\delta \in \mathbb{E}(C,A)$.

(d) Una *inflación* es un morfismo f en $\mathcal{A}$ que admite una conflación $A \xrightarrow{f} B \to C$.

(e) Una *deflación* es un morfismo f en $\mathcal{A}$ que admite una conflación $K \to A \xrightarrow{f} B$.

Definición Una *categoría pre-extriangulada* es una terna $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ tal que satisface los siguientes axiomas.

Definición Una *categoría pre-extriangulada* es una terna $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ tal que satisface los siguientes axiomas.

(ET3) Sean $A \to B \to C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ y $A' \to B' \to C' \overset{\delta'}{\dashrightarrow}$ $\mathbb{E}$-triángulos. Entonces, para todo diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"'] & {} \end{tikzcd}$$

existe un morfismo $C \xrightarrow{c} C'$ en $\mathscr{A}$ tal que (a,b,c) es un morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos.

Definición Una *categoría pretriangulada* es una terna $(\mathcal{A}, T, \Delta)$ tal que satisface los siguientes axiomas.

(TR3) Sean $X \to Y \to Z \to T(X)$, $X' \to Y' \to Z' \to T(X')$ triángulos distinguidos. Entonces, para todo diagrama en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & Z \arrow[r] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\ X' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & Z' \arrow[r] & T(X') \end{tikzcd}$$

donde el cuadrado es conmutativo existe un morfismo $Z \xrightarrow{w} Z'$ en $\mathcal{A}$ tal que (u,v,w) es un morfismo de triángulos distinguidos.

Definición Una *categoría pre-extriangulada* es una terna $(\mathscr{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ tal que satisface los siguientes axiomas.

(ET3) Sean $A \to B \to C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ y $A' \to B' \to C' \overset{\delta'}{\dashrightarrow}$ $\mathbb{E}$-triángulos. Entonces, para todo diagrama en $\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"'] & {} \end{tikzcd}$$

existe un morfismo $C \xrightarrow{c} C'$ en $\mathscr{A}$ tal que (a,b,c) es un morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos.

Definición Una *categoría pre-extriangulada* es una terna $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ tal que satisface los siguientes axiomas.

(ET3) Sean $A \to B \to C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ y $A' \to B' \to C' \overset{\delta'}{\dashrightarrow}$ $\mathbb{E}$-triángulos. Entonces, para todo diagrama en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"'] & {}
\end{tikzcd}$$

existe un morfismo $C \xrightarrow{c} C'$ en $\mathcal{A}$ tal que (a, b, c) es un morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos.

(ET3)* (Dual)

Definición de categoría extriangulada

Una categoría pre-extriangulada es *extriangulada* si satisface los siguientes axiomas.

(ET4) Cualesquiera dos inflaciones $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ se pueden completar a

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[r, dashed, "\delta = \delta'' \cdot d"] \arrow[d, dotted, "d"] & {} \\
A \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[r, dashed, "\delta''"'] \arrow[d, dotted, "e"] & {} \\
 & F \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta'"'] & F \arrow[d, dashed, "\delta''' = f' \cdot \delta'"] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd},$$

donde $f \cdot \delta'' = \delta' \cdot e$ y los dos renglones y las dos columnas con tres objetos son $\mathbb{E}$-triángulos.

Una categoría pre-triangulada es *triangulada* si satisface el siguiente axioma.

(TR4) Cualesquiera morfismos $X \xrightarrow{u} Y$, $Y \xrightarrow{v} Z$ en $\mathcal{T}$ se pueden completar al diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z' \arrow[r, "u''"] \arrow[d, dotted, "a"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "w"'] & Z \arrow[r, "w'"'] \arrow[d, "v'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y' \arrow[r, "w''"'] \arrow[d, dotted, "b"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\
 & X' \arrow[r, equal] \arrow[d, "v''"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "c"] & T(Y), \\
 & T(Y) \arrow[r, "T(u')"'] & T(Z') &
\end{tikzcd}
$$

donde los dos renglones y las dos columnas con cuatro objetos son triángulos distinguidos.

Definición de categoría extriangulada

Una categoría pre-extriangulada es *extriangulada* si satisface los siguientes axiomas.

(ET4) Cualesquiera dos inflaciones $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ se pueden completar a

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[r, dashed, "\delta = \delta'' \cdot d"] \arrow[d, dotted, "d"] & {} \\
A \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[r, dashed, "\delta''"'] \arrow[d, dotted, "e"] & {} \\
& F \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta'"'] & F \arrow[d, dashed, "\delta''' = f' \cdot \delta'"] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd},$$

donde $f \cdot \delta'' = \delta' \cdot e$ y los dos renglones y las dos columnas con tres objetos son $\mathbb{E}$-triángulos.

Definición de categoría extriangulada

Una categoría pre-extriangulada es *extriangulada* si satisface los siguientes axiomas.

(ET4) Cualesquiera dos inflaciones $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ se pueden completar a

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[r, dashed, "\delta = \delta'' \cdot d"] \arrow[d, dotted, "d"] & {} \\
A \arrow[r, "h"'] & C \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[r, dashed, "\delta''"'] \arrow[d, dotted, "e"] & {} \\
 & F \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "\delta'"'] & F \arrow[d, dashed, "\delta''' = f' \cdot \delta'"] & \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}
,
$$

donde $f \cdot \delta'' = \delta' \cdot e$ y los dos renglones y las dos columnas con tres objetos son $\mathbb{E}$-triángulos.

(ET4)* Dual.

Definición de categoría extriangulada

Nota De ahora en adelante, $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ denota a una categoría extriangulada arbitraria.

Propiedades fundamentales de categorías extrianguladas

Proposición Sea $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$ un $\mathbb{E}$-triángulo. Entonces, para todo $X \in \mathscr{A}$, se tiene que las sucesiones

$$\mathscr{A}(X,A) \xrightarrow{\mathscr{A}(X,x)} \mathscr{A}(X,B) \xrightarrow{\mathscr{A}(X,y)} \mathscr{A}(X,C) \xrightarrow{(\delta_\#)_X} \mathbb{E}(X,A) \xrightarrow{\mathbb{E}(X,x)} \mathbb{E}(X,B) \xrightarrow{\mathbb{E}(X,y)} \mathbb{E}(X,C),$$

$$\mathscr{A}(C,X) \xrightarrow{\mathscr{A}(y,X)} \mathscr{A}(B,X) \xrightarrow{\mathscr{A}(x,X)} \mathscr{A}(A,X) \xrightarrow{\delta^\#_X} \mathbb{E}(C,X) \xrightarrow{\mathbb{E}(y,X)} \mathbb{E}(B,X) \xrightarrow{\mathbb{E}(x,X)} \mathbb{E}(A,X)$$

son exactas en Ab, donde $\delta_\#$ y $\delta^\#$ son transformaciones naturales inducidas de $\delta \in \mathbb{E}(C,A)$ por el Lema de Yoneda, y $(\delta_\#)_X$ y $\delta^\#_X$ están dados por

$$(\delta_\#)_X : \mathscr{A}(X,C) \longrightarrow \mathbb{E}(X,A), \quad f \longmapsto \delta \cdot f;$$

$$\delta^\#_X : \mathscr{A}(A,X) \longrightarrow \mathbb{E}(C,X), \quad g \longmapsto g \cdot \delta.$$

Corolario Para cualquier morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "c"] & {} \\ A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"'] & {} \end{tikzcd},$$

las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) a se factoriza a través de x.

(b) $a \cdot \delta = \delta' \cdot c = 0$.

(c) c se factoriza a través de y.

Corolario Para cualquier morfismo de $\mathbb{E}$-triángulos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "c"] & {} \\ A' \arrow[r, "x'"'] & B' \arrow[r, "y'"'] & C' \arrow[r, dashed, "\delta'"'] & {} \end{tikzcd},$$

las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) a se factoriza a través de x.

(b) $a \cdot \delta = \delta' \cdot c = 0$.

(c) c se factoriza a través de y.

Además, si cualesquiera dos de los morfismos a, b y c son isomorfismos en $\mathcal{A}$, entonces el tercero también lo es.

Ejemplo Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta. En caso de que $\mathrm{Ext}^1(C,A)$ (obtenido siguiendo la construcción de Yoneda, como en categorías abelianas) sea un conjunto para cualesquiera $A, C \in \mathcal{A}$, definiendo a la realización $\mathfrak{s}(\delta)$ de $\delta = [A \overset{x}{\rightarrowtail} B \overset{y}{\twoheadrightarrow} C]$ como δ mismo se demuestra que $(\mathcal{A}, \mathrm{Ext}^1, \mathfrak{s})$ es una categoría extriangulada.

Ejemplo Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ una categoría exacta. En caso de que $\mathrm{Ext}^1(C,A)$ (obtenido siguiendo la construcción de Yoneda, como en categorías abelianas) sea un conjunto para cualesquiera $A, C \in \mathcal{A}$, definiendo a la realización $\mathfrak{s}(\delta)$ de $\delta = [A \overset{x}{\rightarrowtail} B \overset{y}{\twoheadrightarrow} C]$ como δ mismo se demuestra que $(\mathcal{A}, \mathrm{Ext}^1, \mathfrak{s})$ es una categoría extriangulada.

Corolario Si $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathfrak{s})$ es una categoría extriangulada en la cual toda inflación es un monomorfismo y toda deflación es un epimorfismo, y $\mathcal{S}$ es la clase de conflaciones dadas por los $\mathbb{E}$-triángulos, entonces $(\mathcal{A}, \mathcal{S})$ es una categoría exacta.

Proposición Para una categoría aditiva $\mathcal{A}$, un automorfismo aditivo $T:\mathcal{A}\xrightarrow{\sim}\mathcal{A}$ y $\mathbb{E}^1(-,-):=\mathrm{Hom}(-,T(-))$, las siguientes condiciones se satisfacen.

Proposición Para una categoría aditiva $\mathcal{A}$, un automorfismo aditivo $T:\mathcal{A}\xrightarrow{\sim}\mathcal{A}$ y $\mathbb{E}^1(-,-):=\operatorname{Hom}(-,T(-))$, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Sea $(\mathcal{A},T,\Delta)$ una categoría triangulada. Si para cada $\delta\in\mathbb{E}^1(C,A)$ tomamos un triángulo distinguido

$$A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C\xrightarrow{\delta}T(A)$$

y definimos $\mathfrak{s}(\delta):=[A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C]$, entonces $(\mathcal{A},\mathbb{E}^1,\mathfrak{s})$ es extriangulada.

Proposición Para una categoría aditiva $\mathcal{A}$, un automorfismo aditivo $T:\mathcal{A}\xrightarrow{\sim}\mathcal{A}$ y $\mathbb{E}^1(-,-):=\mathrm{Hom}(-,T(-))$, las siguientes condiciones se satisfacen.

(a) Sea $(\mathcal{A},T,\Delta)$ una categoría triangulada. Si para cada $\delta\in\mathbb{E}^1(C,A)$ tomamos un triángulo distinguido

$$A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C\xrightarrow{\delta}T(A)$$

y definimos $\mathfrak{s}(\delta):=[A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C]$, entonces $(\mathcal{A},\mathbb{E}^1,\mathfrak{s})$ es extriangulada.

(b) Supongamos que $(\mathcal{A},\mathbb{E}^1,\mathfrak{s})$ es una categoría extriangulada. Si definimos una clase Δ como

$$A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C\xrightarrow{\delta}T(A)\in\Delta\Leftrightarrow\mathfrak{s}(\delta):=[A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C],$$

entonces $(\mathcal{A},T,\Delta)$ es una categoría triangulada.

Definición Un objeto $P \in \mathcal{A}$ es $\mathbb{E}$-*proyectivo* si para todo diagrama en $\mathcal{A}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "x"] & B \arrow[r, "y"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd}$$

se tiene que f se factoriza a través de y.

Definición Un objeto $P \in \mathcal{A}$ es $\mathbb{E}$-*proyectivo* si para todo diagrama en $\mathcal{A}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "x"] & B \arrow[r, "y"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd}$$

se tiene que f se factoriza a través de y. Denotaremos por $\mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathcal{A})$ a la clase de los objetos $\mathbb{E}$-proyectivos en $\mathcal{A}$.

Definición Un objeto $P \in \mathscr{A}$ es *$\mathbb{E}$-proyectivo* si para todo diagrama en $\mathscr{A}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "x"] & B \arrow[r, "y"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd}$$

se tiene que f se factoriza a través de y. Denotaremos por $\mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A})$ a la clase de los objetos $\mathbb{E}$-proyectivos en $\mathscr{A}$. La categoría $\mathscr{A}$ tiene *suficientes $\mathbb{E}$-proyectivos* si para cualquier $X \in \mathscr{A}$ existe una deflación $P \longrightarrow X$, con $P \in \mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A})$.

Definición Un objeto $P \in \mathcal{A}$ es *$\mathbb{E}$-proyectivo* si para todo diagrama en $\mathcal{A}$ de la forma

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "x"] & B \arrow[r, "y"] & C \arrow[r, dashed, "\delta"] & {} \end{tikzcd}$$

se tiene que f se factoriza a través de y. Denotaremos por $\mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathcal{A})$ a la clase de los objetos $\mathbb{E}$-proyectivos en $\mathcal{A}$. La categoría $\mathcal{A}$ tiene *suficientes $\mathbb{E}$-proyectivos* si para cualquier $X \in \mathcal{A}$ existe una deflación $P \longrightarrow X$, con $P \in \mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathcal{A})$.

Proposición Un objeto $P \in \mathcal{A}$ es $\mathbb{E}$-proyectivo si, y sólo si, se satisface que $\mathbb{E}(P, A) = 0$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$.

Proposición Sea $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{A}$ una subcategoría aditiva plena de $\mathscr{A}$. Si $\mathscr{I} \subseteq \mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A}) \cap \mathrm{Inj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A})$, entonces la categoría cociente $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ tiene una estructura de categoría extriangulada, inducida de la de $\mathscr{A}$.

Proposición Sea $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{A}$ una subcategoría aditiva plena de $\mathscr{A}$. Si $\mathscr{I} \subseteq \mathrm{Proj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A}) \cap \mathrm{Inj}_{\mathbb{E}}(\mathscr{A})$, entonces la categoría cociente $\mathscr{A}/\mathscr{I}$ tiene una estructura de categoría extriangulada, inducida de la de $\mathscr{A}$.

Corolario Sea $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{A}$ una subcategoría aditiva plena de $\mathscr{A}$ tal que

$$\mathbb{E}(\mathscr{I}, \mathscr{I}) = 0.$$

Si $\mathscr{Z} \subseteq \mathscr{A}$ es la subcategoría de los objetos $Z \in \mathscr{A}$ tales que

$$\mathbb{E}(Z, I) = 0 = \mathbb{E}(I, Z) \quad \forall I \in \mathscr{I},$$

entonces $\mathscr{Z}/\mathscr{I}$ tiene una estructura de categoría extriangulada.

Definición Un par de cotorsión (completo) $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ en $(\mathcal{A},\mathbb{E},\mathfrak{s})$ es un par $(\mathcal{U},\mathcal{V})$ de subcategorías aditivas plenas de $\mathcal{A}$, cerradas por sumandos directos en $\mathcal{A}$, tal que cumple las siguientes condiciones.

(1) $\mathbb{E}(\mathcal{U},\mathcal{V})=0$.

(2) Para cualquier $C\in\mathcal{A}$, existe una conflación $V^C\to U^C\to C$ tal que $U^C\in\mathcal{U}$ y $V^C\in\mathcal{V}$.

(3) Para cualquier $C\in\mathcal{A}$, existe una conflación $C\to V_C\to U_C$ tal que $U_C\in\mathcal{U}$ y $V_C\in\mathcal{V}$.

Conclusiones y perspectivas

Conclusiones

- Existe una generalización simultánea de las categorías exactas y las categorías trianguladas, dada por las categorías extrianguladas.

Conclusiones

- Existe una generalización simultánea de las categorías exactas y las categorías trianguladas, dada por las categorías extrianguladas.

- Algunas categorías exactas pueden ser vistas como extrianguladas y vice versa. Por otro lado, toda categoría triangulada puede ser vista como extrianguladas y algunas extrianguladas pueden ser vistas como trianguladas.

Conclusiones

- Existe una generalización simultánea de las categorías exactas y las categorías trianguladas, dada por las categorías extrianguladas.

- Algunas categorías exactas pueden ser vistas como extrianguladas y vice versa. Por otro lado, toda categoría triangulada puede ser vista como extrian-gulada y algunas extrianguladas pueden ser vistas como trianguladas.

- Existen categorías extrianguladas que no son exactas ni trianguladas.

Conclusiones

- Existe una generalización simultánea de las categorías exactas y las categorías trianguladas, dada por las categorías extrianguladas.
- Algunas categorías exactas pueden ser vistas como extrianguladas y vice versa. Por otro lado, toda categoría triangulada puede ser vista como extrian-gulada y algunas extrianguladas pueden ser vistas como trianguladas.
- Existen categorías extrianguladas que no son exactas ni trianguladas.
- Se pueden definir pares de cotorsión (completos) en este nuevo contexto.

Perspectivas

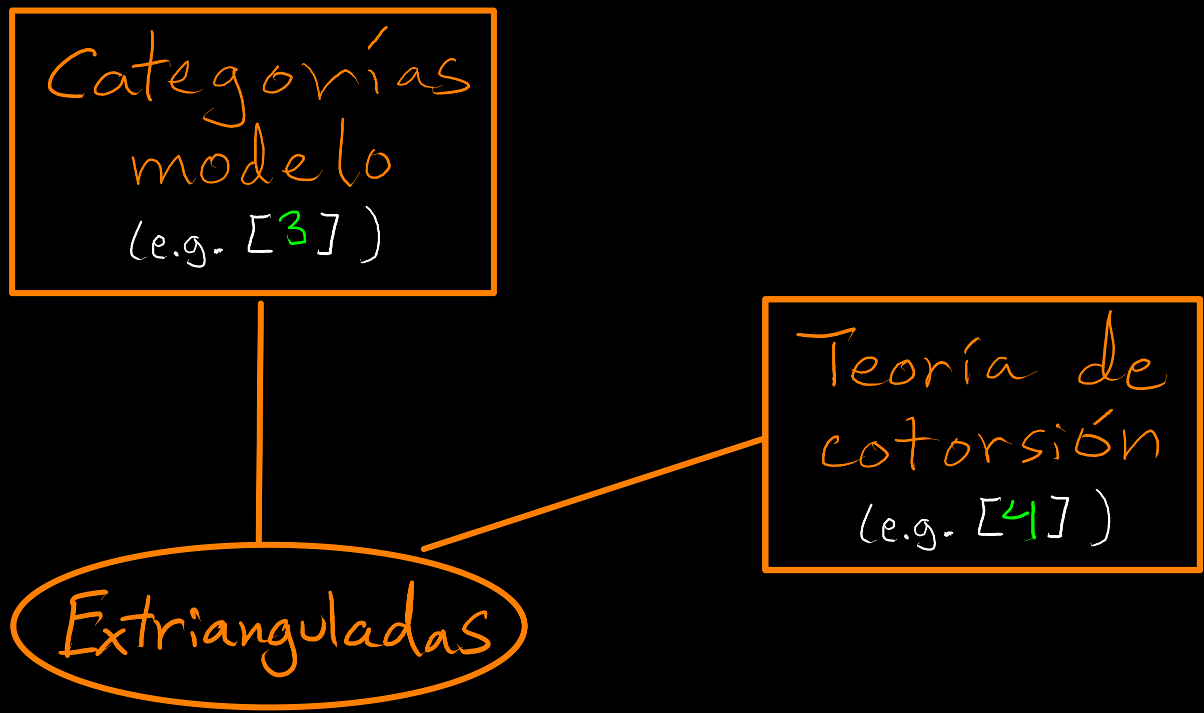
Extrianguladas

Perspectivas

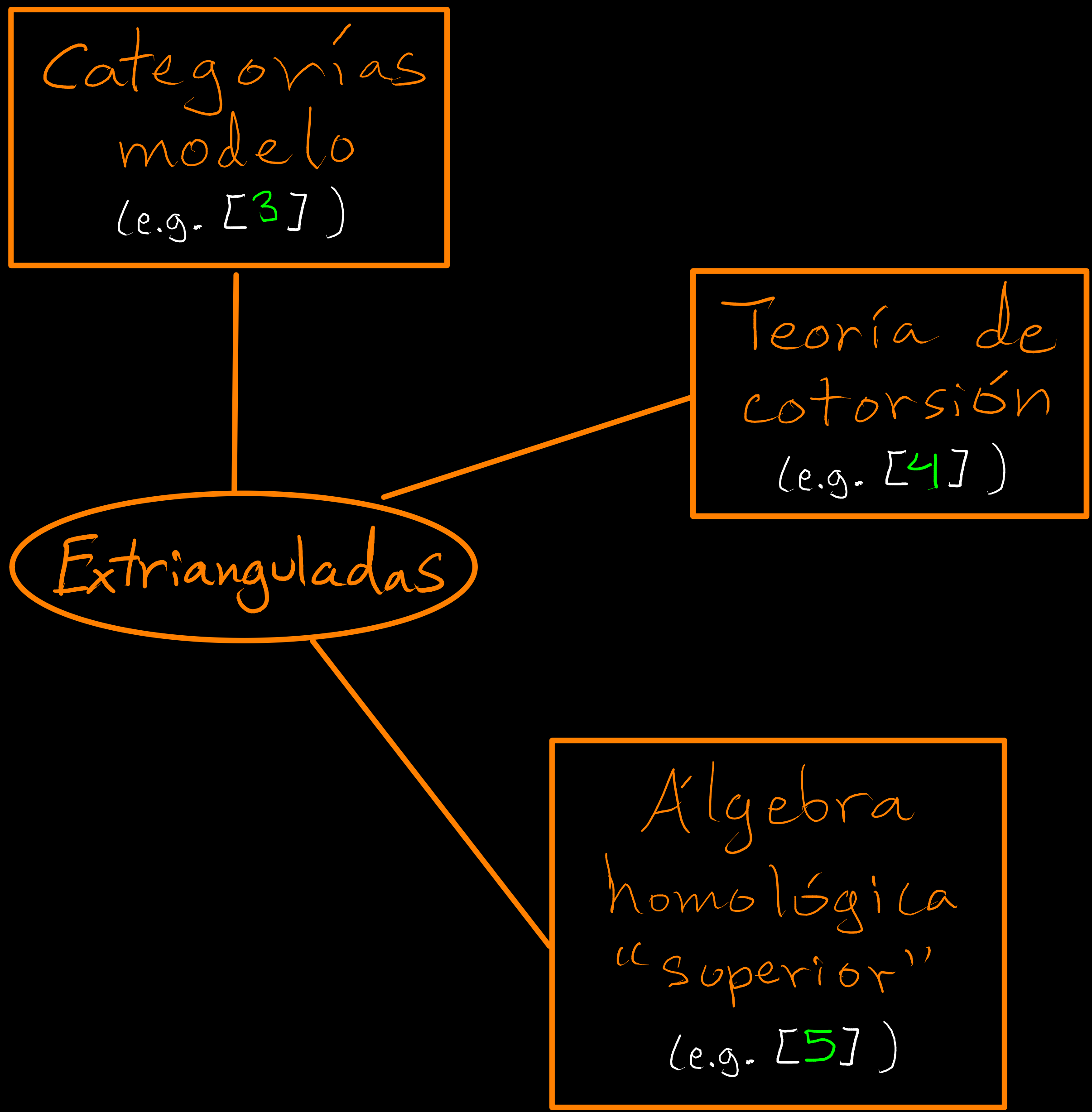
Categorías modelo
(e.g. [3])

Extrianguladas

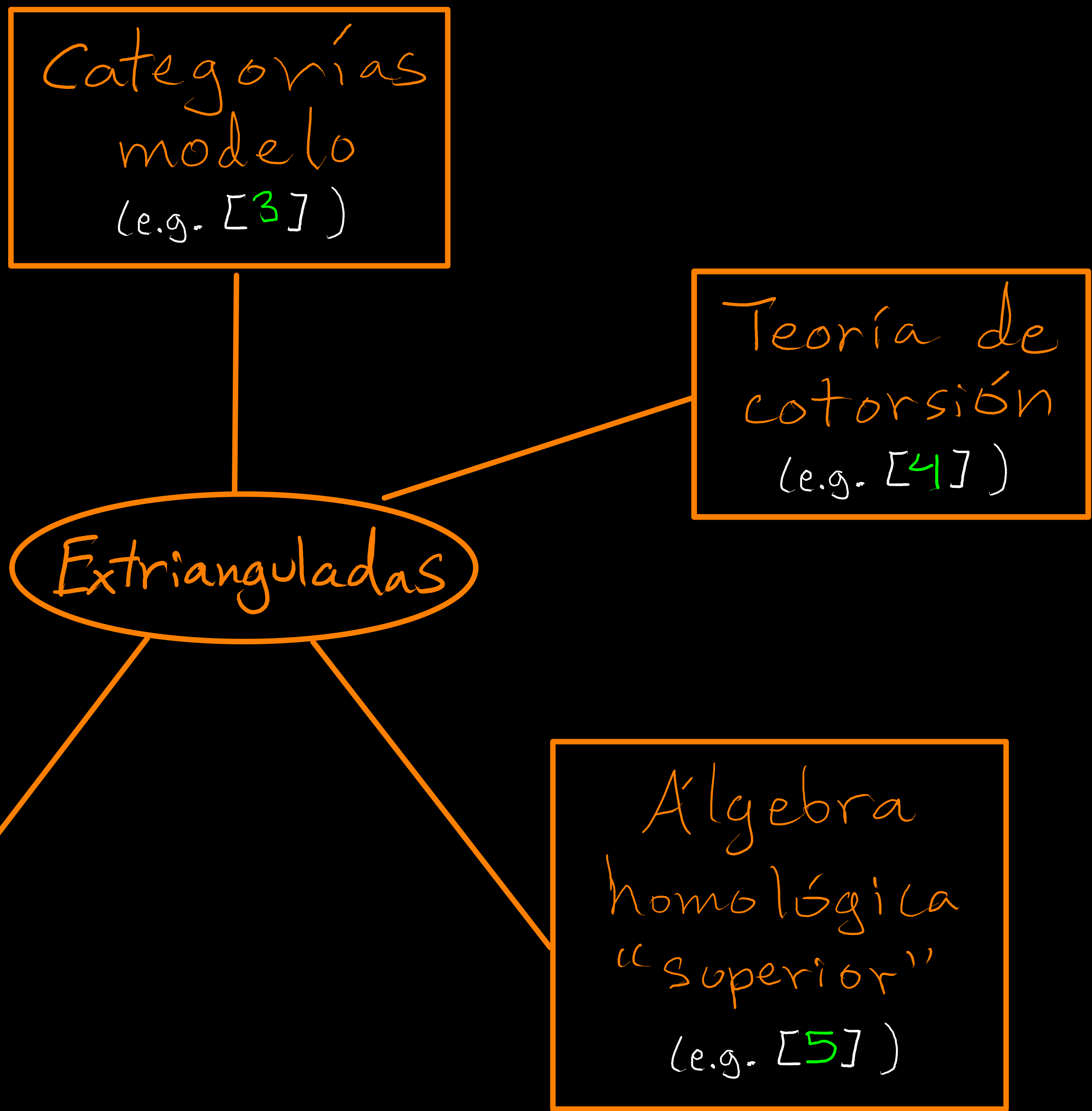
Perspectivas



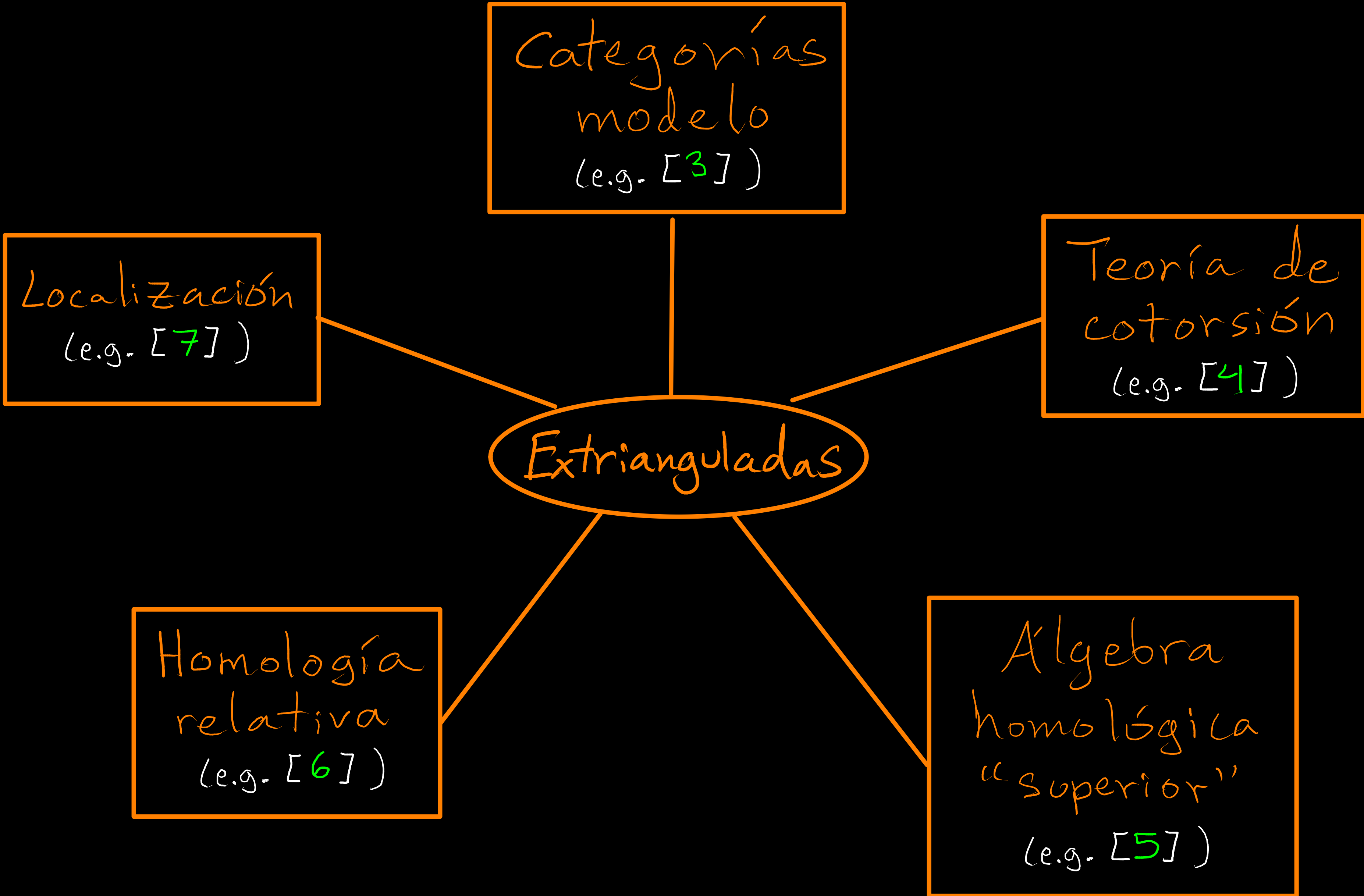
Perspectivas



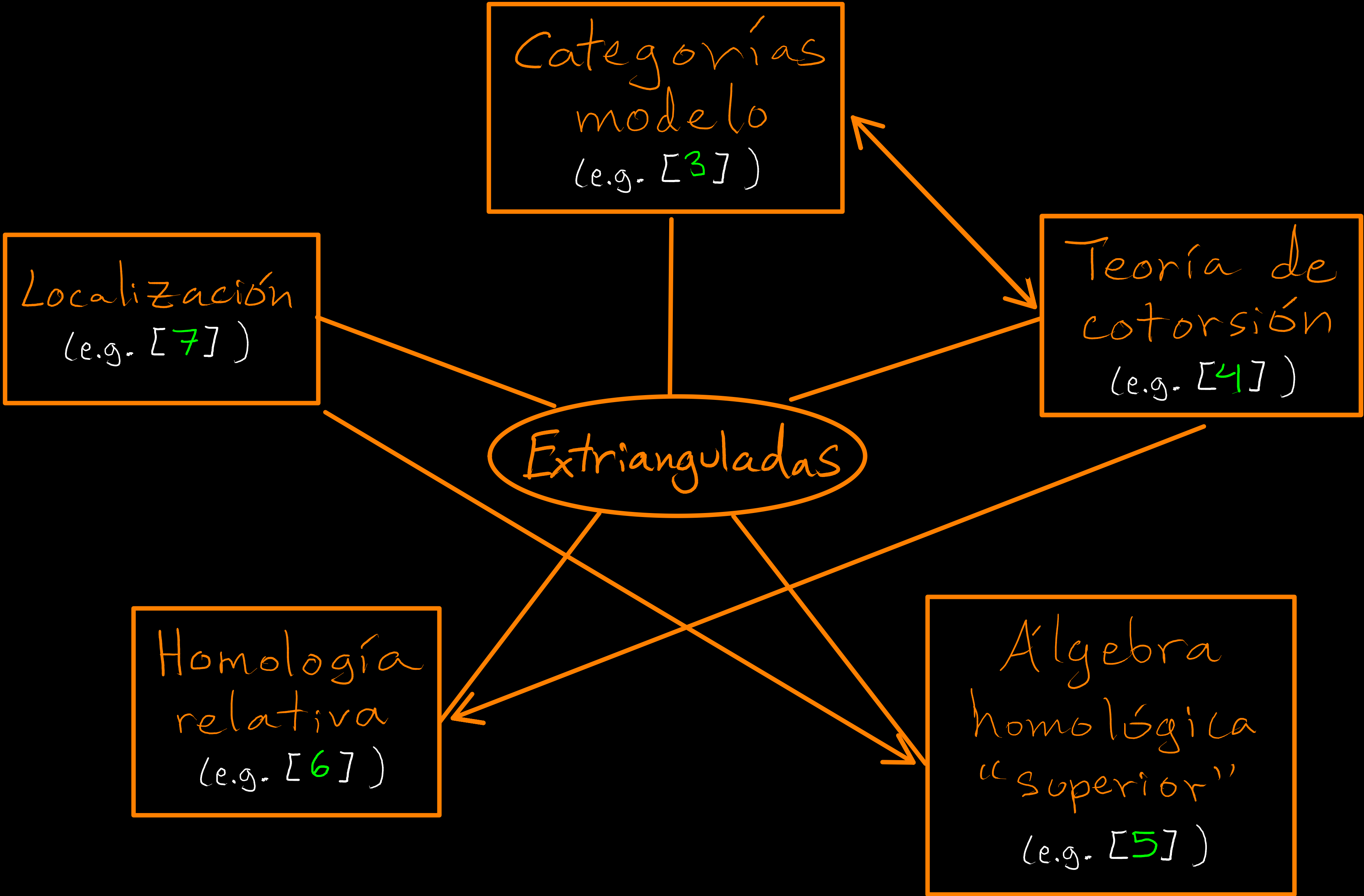
Perspectivas



Perspectivas



Perspectivas



Referencias

[1] L. Salce. "Cotorsion Theories for Abelian Groups". En: *Symp. Math.* (1979), págs. 11-32.

[2] E. B. Arentz-Hansen. "Classifying Subcategories in Quotients of Exact Categories". Tesis de maestría. Norwegian University of Science & Technology, dic. de 2017.

[3] H. Nakaoka e Y. Palu. "Extriangulated Categories, Hovey Twin Cotorsion Pairs and Model Structures". En: *Cah. Top. Géom. Différ. Catég.* 60.2 (2019), págs. 117-193.

[4] M. Huerta, O. Mendoza, C. Sáenz y V. Santiago. "Cut Notions in Extriangulated Categories Related to Auslander-Buchweitz Theory and Cotorsion Theory". (2022) DOI: 10.48550/arXiv.2209.08658.

[5] M. Herschend, Y. Liu y H. Nakaoka. "n-exangulated Categories (I): Definitions and Fundamental Properties". En: *J. Algebra* 570 (2021), págs. 531-586.

[6] Y. Ma, Y. Zhang y N. Ding. "Auslander-Buchweitz Approximation Theory for Extriangulated Categories". (2020) DOI: 10.48550/arXiv.2006.05112.

[7] H. Nakaoka, Y. Ogawa, A. Sakai. "Localization of Extriangulated Categories". En: *J. Algebra* 611 (2022), págs. 341-398.